

**TIAGO JACKSON MAY DEZUO**

**ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO  
LINEARES E CONTROLE DE  
SISTEMAS CHAVEADOS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2010**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES E  
CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas

**TIAGO JACKSON MAY DEZUO**

Florianópolis, Setembro de 2010

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

D532e Dezuo, Tiago Jackson May

Estabilidade de sistemas não lineares e controle de  
sistemas chaveados [dissertação] / Tiago Jackson May Dezuo  
; orientador, Alexandre Trofino Neto. - Florianópolis, SC,  
2010.

156 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de sistemas. 2. Sistemas não lineares. 3.  
Estratégia de chaveamento. I. Trofino Neto, Alexandre. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III.  
Título.

CDU 621.3-231.2(021)

# **ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES E CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS**

**TIAGO JACKSON MAY DEZUO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de concentração em *Controle, Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 18 de agosto de 2010

---

Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Orientador

---

José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

---

Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Presidente

---

Romeu Reginatto, Dr.  
Co-orientador

---

Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

---

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

---

Ubirajara Franco Moreno, Dr.



*À minha mãe, Deolinda May.*





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família pelo constante apoio e compreensão, em especial à minha mãe Deolinda May e minha irmã Elisângela May Justina, e também à Sílvia Cristina Barros de Souza, por sua presença e ternura.

Desejo também expressar um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Alexandre Trofino Neto, pela dedicação, companheirismo e paciência, e ao meu co-orientador Prof. Romeu Reginatto pelos esforços que geraram valiosas contribuições mesmo à distância.

Manifesto também meus sinceros agradecimentos aos membros da banca, Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto e Prof. Ubirajara Franco Moreno, por seus valiosos comentários e contribuições para a consistência e rigor deste trabalho.

Não posso deixar de agradecer aos professores do DAS e colegas com quem convivi durante um ano e meio, e que me proporcionaram um ambiente de amizade e companheirismo, em especial ao colega César Cataldo Scharlau pela dedicação em nossos trabalhos de equipe, indispensável à realização deste trabalho. Obrigado a todos!

Agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina, bem como a todos os seus funcionários, especialmente aos da Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, por todo o suporte logístico.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.



Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

## **ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES E CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS**

**Tiago Jackson May Dezuó**

Setembro / 2010

Orientador: Alexandre Trofino Neto, Dr..

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas.

Palavras-chave: sistemas não lineares, estratégia de chaveamento, LMI.

Número de Páginas: 156

Este trabalho apresenta técnicas de análise de estabilidade de sistemas não lineares e estratégias de controle de sistemas chaveados com uma proposta de formulação para máquinas de indução, ambos utilizando LMIs como ferramenta de trabalho.

Inicialmente, uma nova técnica para se avaliar a estabilidade local, regional e global de sistemas não lineares é apresentada. Os sistemas podem apresentar não linearidades do tipo polinomial, racional e com incerteza paramétrica, e são utilizadas funções de Lyapunov deste mesmo tipo. A abordagem regional conta com a possibilidade de se utilizar a união de politopos para estimar regiões de atração não convexas e da abordagem global tem-se uma técnica para evitar o crescimento do número de LMIs que ocorre na abordagem politópica. Pretende-se aplicar estas técnicas futuramente nos sistemas não lineares chaveados, como a máquina de indução.

Na sequência, é mostrada uma técnica de projeto de estratégias de chaveamento, cujo objetivo principal é garantir estabilidade e desempenho de sistemas comutados. Para isso, a metodologia usada é baseada na teoria de estabilidade de Lyapunov, de modo a descrever as condições necessárias para a lei de chaveamento em forma de LMIs e resolvê-las usando pacotes computacionais existentes.

Ao final, é apresentada a modelagem da máquina de indução de maneira genérica, denotando as diferenças para os casos desta operando como motor ou gerador, e a sua forma de acionamento utilizando inversores de tensão. Em seguida, são definidas as LMIs e a estabilidade de sistemas juntamente à suas propriedades básicas para então mostrar o desenvolvimento da estratégia de chaveamento proposta e os resultados atingidos.



Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

## **STABILITY OF NONLINEAR SYSTEMS AND CONTROL OF SWITCHED SYSTEMS**

**Tiago Jackson May Dezuó**

September / 2010

Advisor: Alexandre Trofino Neto, Dr..

Area of Concentration: Control, Automation and Systems.

Keywords: nonlinear systems, switching rule, LMI.

Number of pages: 156

This work presents techniques for stability analysis of nonlinear systems and control techniques for switched systems with a proposed formulation for induction machines, both using LMIs as a work tool.

Initially, a new technique to evaluate the local, regional and global stabilities of nonlinear systems is presented. The systems may have nonlinearities of polynomial or rational types and have parametric uncertainty, and are used Lyapunov functions of the same kind. The regional approach has the possibility of using the union of polytopes for determining nonconvex estimates of the region of attraction and from the global approach there is a technique to prevent the growth of the number of LMIs that occurs in the polytopic approach. It is intended to apply these techniques in the future for the switched nonlinear systems, such as the induction machine.

Following, a design technique of switching strategies is shown, whose main objective is to ensure stability and performance of switched systems. For this, the methodology used is based on the Lyapunov's theory for stability of systems, describing the necessary conditions for the switching rule proposed in the form of LMIs and solving them using existing software packages.

In the end, it's presented the modeling of the induction machine in a generic way, reflecting the differences in the cases of operating as a motor or generator, and their way of activation using voltage inverters. Then, LMIs and stability of systems are defined jointly with their basic properties and then it's shown the development of the proposed switching strategy and the results achieved.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO GERAL .....	27
1.1	Objetivos .....	31
1.2	Descrição dos Capítulos .....	31
2	CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES .....	33
2.1	Introdução .....	33
2.2	Conceitos Preliminares .....	33
2.2.1	Estabilidade, Desempenho e Região de Atração .....	33
2.2.2	Desigualdade Matricial Linear - LMI .....	36
2.2.2.1	Um conjunto de LMIs é uma LMI .....	38
2.2.2.2	Convexidade .....	38
2.2.2.3	Complemento de Schur .....	39
2.2.2.4	Lema de Finsler .....	39
2.2.2.5	Procedimento-S .....	40
2.2.3	Politopo .....	41
2.2.4	Anuladores e LMIs dependentes dos estados .....	42
2.3	Representação do sistema .....	46
2.4	Condições para estabilidade local .....	49
2.5	Condições e região de atração para estabilidade regional .....	56
2.5.1	Conjunto convexo $\mathcal{X}$ de estados iniciais .....	56
2.5.2	Região de atração robusta .....	60
2.5.3	Conjunto não convexo $\mathcal{X}$ de estados iniciais .....	62
2.6	Condições para estabilidade global .....	65
2.7	Exemplos .....	71
2.8	Considerações Finais do Capítulo .....	83
3	PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO .....	85
3.1	Introdução .....	85
3.2	Condições de Projeto da Lei de Chaveamento .....	85
3.2.1	Inclusão de condições para modos deslizantes estáveis .....	87
3.2.2	Condições LMI do projeto .....	90
3.3	Exemplo de Aplicação: Conversor Buck .....	93
3.4	Considerações Finais do Capítulo .....	97
4	MODELAGEM DE SISTEMAS INVERSOR-MÁQUINA .....	99

4.1	Introdução . . . . .	99
4.2	Modelagem Trifásica da Máquina de Indução . . . . .	99
4.2.1	Dinâmica elétrica . . . . .	100
4.2.2	Dinâmica mecânica . . . . .	102
4.3	Sistemas de Coordenadas - Transformação $\alpha\beta 0$ . . . . .	103
4.4	Sistemas de Referência . . . . .	105
4.4.1	Transformação generalizada de Park . . . . .	105
4.4.2	Sistema de referência estacionário . . . . .	106
4.4.3	Sistema de referência móvel . . . . .	107
4.4.4	Sistema de referência síncrono . . . . .	107
4.5	Modelo da Máquina em Coordenadas Bifásicas . . . . .	108
4.5.1	Dinâmica elétrica . . . . .	108
4.5.2	Dinâmica mecânica . . . . .	110
4.5.3	Modelo em sistema de coordenadas estacionário . . . . .	110
4.5.4	Modelo em sistema de coordenadas móvel . . . . .	111
4.5.5	Modelo em sistema de coordenadas síncrono . . . . .	112
4.6	Acionamento . . . . .	112
4.6.1	Inversor de tensão com PWM baseado em portadora . . . . .	114
4.7	Modelo da Comutação . . . . .	115
4.8	Topologias Usuais do Sistema Inversor-Máquina . . . . .	117
4.9	Considerações Finais do Capítulo . . . . .	120
5	PROPOSTA DE FORMULAÇÃO DE CHAVEAMENTO PARA SISTEMAS INVERSOR-MÁQUINA . . . . .	121
5.1	Introdução . . . . .	121
5.2	Modelo utilizado do sistema . . . . .	121
5.3	Transformações entre inversor e máquina . . . . .	123
5.4	Determinação da frequência síncrona . . . . .	125
5.5	Erro do sistema aumentado para equilíbrios conhecidos . . . . .	126
5.6	Projeto da lei de chaveamento . . . . .	130
5.7	Condições de modos deslizantes para o motor . . . . .	132
5.8	Resolução das LMIs . . . . .	136
5.9	Estrutura do Sistema de Controle . . . . .	137
5.10	Considerações Finais do Capítulo . . . . .	139
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	141
	Apêndice A – Dados de Simulação . . . . .	153
	Apêndice B – Matrizes utilizadas na formulação proposta para o motor . . . . .	155



## LISTA DE FIGURAS

1	Região de atração do sistema (2.8). . . . .	37
2	Representação de um politopo. . . . .	42
3	Vértices $v_i$ e vetores $a_k$ das faces do politopo $\mathcal{X}$ para $x = [x_1 \ x_2]'$ . . . . .	57
4	Representação da união não convexa de dois politopos convexos e seus vértices. . . . .	62
5	Regiões de atração estimadas para o sistema (2.118) com $\varepsilon=1$ . . . . .	73
6	Regiões de atração estimadas para o sistema (2.123). . . . .	75
7	Regiões de atração estimadas para o sistema (2.124) com $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.5$ . . . . .	78
8	Regiões de atração estimadas para o sistema (2.131). . . . .	81
9	Região de atração estimada para o sistema (2.131) considerando a união dos politopos $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ . . . . .	82
10	Regiões de atração estimadas para o sistema (2.132). . . . .	83
11	Conversor abaixador de tensão ( <i>Buck</i> ). . . . .	94
12	Resultados de simulação do conversor <i>Buck</i> com a lei de chaveamento projetada. . . . .	96
13	Vista axial representativa de uma máquina de indução. . . . .	100
14	Transformação $\alpha\beta 0$ . . . . .	104
15	Transformação de Park para um sistema de referência arbitrário “ $x$ ” aplicadas às variáveis do estator e do rotor. . . . .	106
16	Diagrama esquemático do inversor de tensão trifásico. . . . .	113
17	Formas de onda do inversor de tensão com CB-PWM. . . . .	114
18	Modelo da comutação do inversor. . . . .	116
19	Configuração comum para motores de indução com rotor em gaiola. . . . .	117
20	Configuração comum para o DFIG usual. . . . .	118
21	Configuração comum para o DFIG totalmente controlado. . . . .	119
22	Configuração comum para o SCIG. . . . .	119
23	Transformações requeridas para as tensões de fase entre inversor e máquina. . . . .	123
24	Representação gráfica do simplex $\Delta$ para o caso onde $m_s = 3$ . . . . .	136
25	Estrutura do controle chaveado aplicado ao motor de indução com inversor trifásico. . . . .	138



## LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros utilizados na simulação do conversor <i>Buck</i> . . . .	95
2	Definição da posição das chaves do inversor em todos os modos possíveis. . . . .	117
3	Valores dos termos de $V_i^{-1}$ para os modos $i \in \{1, \dots, 8\}$ . . .	129



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Desigualdade Matricial Linear
SOS	<i>Sum of Squares</i> - Soma de Quadrados
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i> - Modulação por Largura de Pulso
DFIG	<i>Double Fed Induction Generator</i> - Gerador de Indução de Excitação Dupla
IFOC	<i>Indirect Field Oriented Control</i> - Controle com Orientação Indireta do Campo
DTC	<i>Direct Torque Control</i> - Controle Direto de Conjugado
DPC	<i>Direct Power Control</i> - Controle Direto de Potência
MPPT	<i>Maximum Power Point Tracking</i> - Seguimento do Ponto de Potência Máxima
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> - Regulador Linear Quadrático
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian Control</i> - Controlador Gaussiano Linear Quadrático
LFR	<i>Linear Fractional Representation</i> - Representação Fracional Linear
pu	Por unidade
RMS	<i>Root Mean Square</i> - Valor Médio Quadrático
CSI	<i>Current Source Inverter</i> - Inversor com Fonte de Corrente
VSI	<i>Voltage Source Inverter</i> - Inversor com Fonte de Tensão
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i> - Transistor Bipolar de Porta Isolada
CC	Corrente Contínua
CA	Corrente Alternada
CB-PWM	<i>Carrier-Based PWM</i> - PWM Baseado em Portadora
SCIG	<i>Squirrel Cage Induction Generator</i> - Gerador de Indução com Rotor em Gaiola
PI	Proporcional-Integral



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{M}$	Conjunto de modos do sistema
$V_a$	Tensão na fase $a$ (semelhante para fases $b$ e $c$ )
$i_a$	Corrente na fase $a$ (semelhante para fases $b$ e $c$ )
$\phi_a$	Fluxo resultante na fase $a$ (semelhante para fases $b$ e $c$ )
$R_s$	Resistência do estator
$R_r$	Resistência do rotor referenciada ao circuito do estator
$N_s$	Número de espiras equivalentes do estator
$N_r$	Número de espiras equivalentes do rotor
$\tilde{V}_s$	Valores RMS das tensões de fase do estator
$\tilde{V}_r$	Valores RMS das tensões de fase do rotor
$R_{rr}$	Resistência do rotor referenciada ao circuito do rotor
$\tau_e$	Conjugado eletromagnético
$\tau_c$	Conjugado de carga
$J_m$	Momento de inércia do sistema (motor e carga)
$B_m$	Coefficiente de atrito viscoso
$\omega_m$	Velocidade angular mecânica do rotor
$\omega_r$	Velocidade angular elétrica do rotor
$p$	Número de pares de polos
$\varphi_r$	Posição angular do rotor
$\omega_s$	Velocidade síncrona do campo girante
$\varphi_s$	Posição angular do campo girante do estator
$L_s$	Indutância do estator por fase
$L_r$	Indutância do rotor por fase
$L_m$	Indutância de magnetização por fase
$V_{cc}$	Tensão de alimentação em CC do inversor
$\hat{\omega}_{sl}$	Frequência de escorregamento estimada
$u$	Vetor de comando das posições das chaves do inversor





## NOTAÇÃO

$f_{abc}$	Grandeza vetorial $f$ em coordenadas trifásicas $abc$
$f_{\alpha\beta 0}$	Grandeza vetorial $f$ em coordenadas bifásicas $\alpha\beta 0$
$f_{dq0}^x$	Grandeza vetorial $f$ em coordenadas bifásicas $dq0$ de referência “x”
$M'$	Transposta da matriz (ou do vetor) $M$
$M^{-1}$	Inversa da matriz $M$
$\det(M)$	Determinante da matriz $M$
$I_n$	Matriz identidade de dimensão $n \times n$
$O_n$	Matriz quadrada de zeros de dimensão $n \times n$
$O_{n \times m}$	Matriz de zeros de dimensão $n \times m$
$a \times b$	Produto vetorial entre $a$ e $b$
$\rightarrow$	Transformação linear
$\ \cdot\ $	Norma 2 dos vetores em $(\cdot)$
$\ \cdot\ _\infty$	Norma $\infty$ dos vetores em $(\cdot)$
$f(\cdot)$	Função afim na variável $(\cdot)$
$\bar{x}$	Valor constante de equilíbrio de $x$ em regime
$\dot{x}$	Derivada de $x$ em relação ao tempo
$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de dimensão $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathcal{L}_2$	Espaço dos sinais quadraticamente integráveis com a norma 2 definida sempre
$\mathcal{C}^1$	Espaço das funções continuamente diferenciáveis
$M > 0$	Matriz $M$ é simétrica e positiva-definida
$M < 0$	Matriz $M$ é simétrica e negativa-definida
$lin_i(M)$	$i$ -ésima linha da matriz $M$
$col_i(M)$	$i$ -ésima coluna da matriz $M$
$[M_i]_{lin}^n$	Matriz linha concatenando os $n$ blocos $M_i$
$[M_i]_{col}^n$	Matriz coluna concatenando os $n$ blocos $M_i$
$[M_i]_{diag}^n$	Matriz diagonal concatenando os $n$ blocos $M_i$
$\mathfrak{V}(\mathcal{X})$	Conjunto de todos os vértices do politopo $\mathcal{X}$
$\mathbf{Co}\{v_i, i \in \{1 \dots q\}\}$	Envoltório convexo do conjunto de $q$ vetores $\{v_1, \dots, v_q\}$
$\mathbf{Co}\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$	Envoltório convexo dos elementos dos conjuntos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$
$\arg \max \{v_1, \dots, v_m\}$	Denota o índice $i \in \{1, \dots, m\}$ associado ao máximo elemento do conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ onde $v_i \in \mathbb{R}$



## 1 INTRODUÇÃO GERAL

Grande parte dos sistemas físicos pode ser descrita por equações diferenciais não-lineares, o que explica o grande interesse existente nesta área de pesquisa (KHALIL, 1996), (SLOTINE; LI, 1991). Ainda, na grande maioria dos casos, estas equações diferenciais não são completamente conhecidas, principalmente no que diz respeito aos seus parâmetros. A preocupação com sistemas incertos deu origem à Teoria de Controle Robusto (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996).

Devido às propriedades práticas e disponibilidade de poderosos pacotes computacionais para resolver problemas de desigualdades matriciais lineares (LMI)<sup>1</sup>, estas têm sido amplamente utilizadas para resolver problemas de filtragem e controle robusto. No contexto de sistemas incertos lineares, vários resultados importantes estão disponíveis em (BOYD et al., 1994). Entretanto, muito trabalho ainda há para ser realizado no sentido de estender estes resultados para sistemas não lineares. Nesta área, vários métodos potencialmente interessantes encontrados na literatura possuem dificuldades na solução numérica (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985).

O uso de LMIs levando à condições convexas de estabilidade para sistemas não lineares é recente. As abordagens utilizadas diferem entre si na forma em que as condições de estabilidade de Lyapunov são escritas em um conjunto de LMIs. A técnica conhecida como soma de quadrados (SOS)<sup>2</sup> utiliza programação semi-definida com a finalidade de decompor as funções de Lyapunov em termos de somas de quadrados, para sistemas polinomiais (PAPACHRISTODOULOU; PRAJNA, 2004). Em (CHESI et al., 2004), as condições de estabilidade são descritas em polinômios homogêneos, *i.e.* compostos por monômios de mesmo grau. A representação por frações lineares, utilizada por (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996), decompõe o sistema em frações lineares e utiliza uma função de Lyapunov quadrática. A abordagem apresentada em (TROFINO, 2000) (COUTINHO; FU, 2002) é baseada na representação do sistema em termos de equações algébrico-diferenciais e funções de Lyapunov polinomiais.

A principal vantagem em expressar a dinâmica de um sistema em decomposições não lineares é que a estrutura original do sistema é mantida, permitindo a utilização da teoria de controle robusto clássica (BOYD et al., 1994) para controle e filtragem (COUTINHO et al., 2003), (COUTINHO et al., 2008). Entretanto, as condições de estabilidade baseadas em funções

<sup>1</sup>Do inglês, *Linear Matrix Inequality*.

<sup>2</sup>Do inglês, *Sum of Squares*.

de Lyapunov polinomiais podem levar a estimativas não tão boas (conservadoras) da região de atração se o grau do polinômio não é grande o suficiente. Em vista disso, seria interessante investigar o potencial de funções de Lyapunov racionais em problemas de estabilidade de sistemas não lineares. Em (SEILER et al., 2009) são mostradas propriedades interessantes das funções de Lyapunov racionais de sistemas lineares incertos.

Neste trabalho são apresentadas algumas contribuições para superar, ou ao menos aliviar o impacto de, as várias dificuldades decorrentes do mencionado anteriormente. Primeira: o conservadorismo das LMIs dependentes de estado é reduzido com o uso de certas *matrizes de escalonamento*. Conexões com alguns resultados disponíveis na literatura são estabelecidas e as vantagens são ilustradas através de exemplos numéricos. Segunda: as funções de Lyapunov usadas neste trabalho são mais gerais que qualquer função de Lyapunov baseada em polinômios usadas em todas as referências previamente mencionadas. Aqui a função de Lyapunov pode ser do tipo racional nos estados do sistema e dependente de parâmetros incertos.

Outras contribuições podem ser citadas, como as da sequência. Terceira: para evitar o crescimento exponencial do número de LMIs, que cresce em problemas LMI politópicos, um novo resultado é proposto para converter as LMIs politópicas em não politópicas. Isso é feito explorando a dependência afim das LMIs e usando a operação matricial conhecida como Procedimento-S. Este resultado também é usado para derivar condições LMI para estabilidade assintótica global. Quarta: A região de atração estimada é obtida resolvendo problemas de otimização LMI que consistem em maximizar a curva de nível da função de Lyapunov com respeito a um conjunto de condições iniciais dado. este conjunto pode ser escolhido como politópico (convexo) ou uma união de politopos (não convexa). Esta característica permite obter regiões de atração também não convexas.

Um outro tipo de sistemas não lineares são os sistemas chaveados, que apresentam variação estrutural em função do tempo ou dos estados, segundo alguma lógica. Usualmente, as técnicas de controle de sistemas chaveados não atuam diretamente no controle da posição das chaves, apenas geram uma referência de forma de onda (ou de valor médio) desejada à um elemento que realiza a modulação por largura de pulso (PWM)<sup>3</sup>. Outro tipo de controle de sistemas chaveados é o que determina diretamente a posição das chaves através de uma lei de chaveamento específica. Como exemplo de técnicas de projeto de lei de chaveamento podemos citar as baseadas em funções de Lyapunov (LIBERZON, 2003), como em (BOLZERN; SPINELLI, 2004)

---

<sup>3</sup>Do inglês, *Pulse-Width Modulation*.

e (TROFINO et al., 2009). As técnicas de chaveamento podem ser estruturadas em forma LMIs, que oferece flexibilidade no tratamento de problemas de natureza mista e conta com eficientes pacotes computacionais para solução numérica, como é o caso de (TROFINO et al., 2009) e (ASSMANN, 2008).

Como exemplo de sistema chaveado pode-se citar o acionamento de máquinas de indução através de inversores de frequência, que são dispositivos de eletrônica de potência cujo valor da tensão de saída é resultado do nível da tensão de entrada e da situação “aberta” ou “fechada” das chaves que compõem sua estrutura. Por isso o conjunto inversor-máquina pode ser denominado como um sistema comutado. Os sistemas comutados (ou chaveados) são uma classe de sistemas híbridos com uma extensa lista de aplicações em controle (MORSE, 1997). Pode-se encontrar exemplos de sistemas comutados em (LIBERZON, 2003). A máquina de indução, também conhecida como máquina assíncrona, é um dos tipos de dispositivo que converte energia elétrica em energia mecânica (operando como motor), e o vice-versa (operando como gerador). O crescente uso de motores de indução em aplicações industriais e de geradores de indução em parques eólicos nas últimas décadas se deve principalmente ao seu baixo custo, características de robustez e facilidade de manutenção (ASSEU et al., 2008). Entretanto, a utilização da máquina assíncrona só passou a crescer com o desenvolvimento das técnicas de controle vetoriais por Hasse e Blaschke (BLASCHKE, 1972), na Alemanha da década de 70 do século passado, e de estratégias (e dispositivos) de acionamento mais eficientes (TRZYNADLOWSKI, 2000), (LEONHARD, 2001).

As principais variáveis a serem controladas no motor são normalmente a velocidade do rotor ou o torque de carga, enquanto no gerador são as potências ativa e reativa entregues à carga, ou à rede de transmissão no caso de sistemas de distribuição como em (TARNOWSKI; REGINATTO, 2006), (DENDOUGA et al., 2007). Como é de se esperar, a velocidade dos ventos nos parques eólicos é variável, e então essa característica deve ser levada em conta na estratégia de controle, como em (TARNOWSKI; REGINATTO, 2007). Na geração eólica comumente é utilizado o gerador de indução de excitação dupla (DFIG)<sup>4</sup> que permite a geração de energia tanto pelo estator da máquina quanto pelo rotor (ANAYA-LARA et al., 2009).

Devido à complexidade do modelo da máquina de indução, estratégias se fazem necessárias para simplificar o controle, como por exemplo o controle com orientação indireta de campo (IFOC)<sup>5</sup>, cuja descrição pode ser encontrada em (LEONHARD, 1998). Como exemplo de aplicação, esta técnica

---

<sup>4</sup>Do inglês, *Double Fed Induction Generator*.

<sup>5</sup>Do inglês, *Indirect Field Oriented Control*.

é utilizada em (BAZANELLA; REGINATTO, 2001) para regulação robusta de velocidade. Outra estratégia é a conhecida como controle direto de conjugado (DTC)<sup>6</sup>, e sua variante, o controle direto de potência (DPC)<sup>7</sup>, cuja aplicação pode ser vista em (MAHI; SERBAN; SIGUERDIDJANE, 2007). Com aplicação voltada à geradores, existe a técnica de seguimento do ponto de potência máxima (MPPT)<sup>8</sup>, que visa a otimização da potência gerada (ANAYA-LARA et al., 2009).

Técnicas de controle não linear têm a vantagem de se poder considerar a estrutura real do sistema, o que permite que a técnica funcione para uma ampla região do espaço de estados, não apenas nas proximidades de um ponto de linearização. A aplicação deste tipo de controladores pode ser interessante para o caso da máquina de indução devido ao grande número de não linearidades presentes em seu modelo. Como exemplos de controladores não lineares e suas aplicações em controle de máquinas de indução é possível citar: as baseadas em passividade como *energy-shaping*<sup>9</sup> com injeção de amortecimento (ORTEGA; ESPINOSA-PÉREZ, 2005), linearização por realimentação exata (ASSEU et al., 2008), (DE LUCA; ULIVI, 1989), (CHIASSON, 1993), (KIM; HA; KO, 1990). Entretanto, a primeira técnica apresenta grandes dificuldades por necessitar da solução de equações diferenciais parciais, mesmo utilizando pacotes computacionais dedicados à isso, e as dificuldades da segunda residem no fato de que se os parâmetros ou o modelo não são bem conhecidos, o sistema linear obtido com a técnica não corresponde fielmente ao original. Como exemplo de outras técnicas aplicadas à máquinas de indução, podemos citar o controle adaptativo utilizando um modelo de referência de estrutura variável (FURTUNATO; SALAZAR; DE ARAUJO, 1998) e o controle por redes neurais e lógica *fuzzy* (DENAI; ATTIA, 2002).

Com base no exposto anteriormente, neste trabalho também é apresentada uma proposta de formulação da técnica de chaveamento de (TROFINO et al., 2009), (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010) para aplicação em máquinas de indução, dando continuidade e ampliando os resultados de pesquisas anteriores, como a técnica de chaveamento proposta em (ASSMANN, 2008) e a formulação para motores de indução apresentada em (COUTINHO, 2006). Devido ao fato de o modelo da máquina ser bastante não linear, há a possibilidade de aplicação futura das condições de estabilidade para sistemas não lineares racionais e incertos, apresentada aqui, à sistemas chaveados, como o caso da máquina de indução.

---

<sup>6</sup>Do inglês, *Direct Torque Control*.

<sup>7</sup>Do inglês, *Direct Power Control*.

<sup>8</sup>Do inglês, *Maximum Power Point Tracking*.

<sup>9</sup>Moldagem da energia.

## 1.1 **Objetivos**

Esta dissertação tem como objetivo principal a análise da estabilidade de sistemas não lineares, assim como o estudo de técnicas de chaveamento. Para isso, dois objetivos secundários são destacados:

- a apresentação de uma nova técnica para análise de estabilidade de sistemas não lineares, que considera sistemas com não linearidades nas formas racional ou polinomial de qualquer grau e ainda com incertezas paramétricas. Esta técnica também é baseada na determinação, por LMIs, de funções de Lyapunov que também podem ser consideradas racionais e incertas, para se determinar a estabilidade assintótica local, regional e global.
- o desenvolvimento de uma técnica de controle chaveado, com aplicação em máquinas de indução, utilizando LMIs como ferramenta para determinar as funções de Lyapunov que caracterizem uma lei de chaveamento com estabilidade garantida para o sistema inversor-máquina em malha fechada, levando em conta a possível ocorrência de modos deslizantes. Há o intuito de se combinar, no futuro, esta técnica de controle chaveado com a descrita no item anterior.

## 1.2 **Descrição dos Capítulos**

Esta dissertação está organizada nos seguintes capítulos:

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação de um novo método para determinação da estabilidade de sistemas não lineares racionais e incertos e inicialmente são abordados conceitos preliminares sobre estabilidade, desigualdades matriciais lineares e teorias de chaveamento baseada em funções de Lyapunov, fundamentais ao projeto da técnica proposta. A técnica sugere uma nova forma de representação para estes tipos de sistema, que permite o desenvolvimento das condições de estabilidade local, regional e global, apresentadas também. Para o caso regional, são propostas maneiras de otimização para obtenção da maior região de atração possível. Por fim, vários exemplos de aplicação são mostrados.

No Capítulo 3 é descrita uma técnica de chaveamento cujo objetivo é a estabilidade e o seguimento de referência de sistemas comutados. Esta técnica é baseada em funções de Lyapunov quadráticas diferentes para cada modo de operação e as garantias de estabilidade se dão pela positividade e decrescimento da função de Lyapunov comutada (a função do modo ativo

no instante considerado), inclusive na ocorrência de modos deslizantes entre vários modos na mesma superfície. Por fim, é demonstrada a utilização da técnica na resolução de um exemplo simples.

O Capítulo 4 apresenta os modelos e transformações utilizados na formulação da técnica de chaveamento para motores de indução abordados nesta dissertação. São discutidas a modelagem das partes mecânica e elétrica da máquina de indução de forma genérica e a modelagem da comutação do inversor de tensão. Por fim, são mostradas algumas topologias possíveis para o sistema inversor-máquina. Este capítulo tem como objetivo apenas apresentar a base teórica e matemática para o capítulo seguinte, podendo ser ignorado pelo leitor com experiência em máquinas, se desejado.

No Capítulo 5 é mostrada uma proposta de aplicação da lei de chaveamento para um dos tipos de máquina apresentados no capítulo anterior, assim como a estrutura de controle e as formas de simulação e os resultados parciais obtidos. O interesse deste capítulo nessa dissertação se dá pela possibilidade de união futura com as técnicas de estabilidade de sistemas não lineares do Capítulo 2 de modo a facilitar a busca por solução para o caso do chaveamento da máquina.

No Apêndice A são fornecidos os dados da máquina utilizados, assim como as demais variáveis quantificadas necessárias à simulação.

No Apêndice B são mostradas algumas matrizes derivadas da formulação proposta, cujas estruturas completas são ocultadas nesta.



## **2 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES**

### **2.1 Introdução**

Este capítulo apresenta técnicas de verificação de estabilidade local, regional e global de sistemas não lineares racionais e incertos. É mostrada uma forma particular de representação do sistema para que este se torne afim nas variáveis de estado e parâmetros incertos possibilitando a formulação LMI do problema de uma forma simples. Em seguida são abordadas as condições para estabilidade local, que na sequência são estendidas para estabilidade regional e global. Na estabilidade regional são considerados dois casos: politopo único (convexo) e união de politopos (não convexa). Na estabilidade global, como um segundo resultado, é mostrada uma técnica para evitar a abordagem politópica.

Este capítulo apresenta as maiores contribuições deste trabalho: uma forma simples de se encontrar funções de Lyapunov ricas em informação, podendo inclusive ser racionais no estado, a estimação da região de atração pela união de politopos e a alternativa para evitar o crescimento exponencial do número de LMIs da abordagem politópica.

Pretende-se, futuramente, a incorporação desta técnica de estabilidade de sistemas não lineares no projeto de leis de chaveamento para máquinas de indução (sistema com grande número de não linearidades).

### **2.2 Conceitos Preliminares**

Visando facilitar a compreensão das técnicas apresentadas posteriormente neste capítulo e no Capítulo 2, esta seção apresenta, de forma sintetizada, diversos conceitos que se fazem necessários.

#### ***2.2.1 Estabilidade, Desempenho e Região de Atração***

A estabilidade desempenha um papel fundamental na teoria de sistemas de controle e dentre os seus diferentes tipos no estudo de sistemas dinâmicos. Neste trabalho é considerado o conceito de estabilidade de pontos de equilíbrio, cuja definição dada em (KHALIL, 1996) é:

Um ponto de equilíbrio é estável se todas as soluções que partem de pontos próximos, permanecem próximas; em caso contrário, é instável. Além disso, quando todas as soluções partindo de pontos próximos não somente permanecem próximas, mas também convergem ao ponto de equilíbrio quando o tempo tende ao infinito, este é dito assintoticamente estável.

Dentre os diversos métodos utilizados na análise de estabilidade, um dos principais foi introduzido no final do século XIX pelo matemático e engenheiro russo Lyapunov. A partir da ideia de que a energia do sistema é positiva e deve decrescer com o tempo, Lyapunov mostrou que certas funções, não necessariamente com uma interpretação física ligada à energia do sistema, poderiam ser usadas para determinar condições suficientes para estabilidade de um ponto de equilíbrio. Para ilustrar a ideia do método, seja  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$  um domínio que contém a origem e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções com  $v \in \mathcal{C}^1$ . Então a derivada temporal de  $v$  ao longo das trajetórias do sistema  $\dot{x} = f(x)$ , denotada por  $\dot{v}(x)$ , é dada por:

$$\dot{v}(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial v}{\partial x} f(x), \quad (2.1)$$

e note que não é necessário se conhecer a solução de  $\dot{x} = f(x)$  para se obter a expressão da derivada de  $v(x)$ .

Por conveniência, as expressões e teoremas apresentados neste trabalho são para o caso do ponto de equilíbrio estar na origem do  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\bar{x} = 0$ . Não há perda de generalidade nisso, pois o ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem via uma mudança de variáveis. Suponha que  $\bar{x} \neq 0$  e considere a mudança de variáveis  $e = x - \bar{x}$ . A derivada de  $e$  é dada por

$$\dot{e} = \dot{x} = f(x) = f(e + \bar{x}) \triangleq g(e), g(0) = 0. \quad (2.2)$$

Na nova variável  $e$ , o sistema tem equilíbrio na origem. A seguir é apresentado o teorema de estabilidade de Lyapunov.

**Teorema 2.1 (Lyapunov)** *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$  e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  pertencente ao  $\mathcal{C}^1$  tal que*

$$v(0) = 0 \quad e \quad v(x) > 0 \quad em \quad \mathcal{D} - 0, \quad (2.3)$$

$$\dot{v}(x) \leq 0 \quad em \quad \mathcal{D}, \quad (2.4)$$

então,  $x = 0$  é estável. Além disso, se

$$\dot{v}(x) < 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D} - 0, \quad (2.5)$$

então  $x = 0$  é assintoticamente estável.  $\square$

A prova e outras versões deste teorema podem ser encontradas em (KHALIL, 1996). A ideia central da estabilidade segundo Lyapunov é encontrar uma função  $v(x)$  que seja nula na origem, positiva fora dela e decrescente para as trajetórias do sistema. Quando isso for possível, tem-se garantia de que as trajetórias convergem para a origem, indicando estabilidade assintótica.

Apenas a estabilidade geralmente não é suficiente para caracterizar um bom sistema de controle, este deve apresentar também um desempenho satisfatório. O desempenho se faz necessário por diversos fatores, como: limitação dos atuadores, imprecisão dos medidores (ruído), conhecimento impreciso do sistema a ser controlado (incertezas, características dos ruídos e perturbações), critérios de velocidade de convergência do sistema, dentre outros.

Como exemplos de técnicas de controle com desempenho obtidos com o auxílio da função de Lyapunov, podemos citar o regulador linear quadrático (LQR)<sup>1</sup>, o controlador gaussiano linear quadrático (LQG)<sup>2</sup> e a minimização das normas<sup>3</sup>  $H_2$  e  $H_\infty$  de sistemas, (BOYD et al., 1994). As técnicas LQR e LQG, por exemplo, visam estabelecer um compromisso entre as energias de estado e controle (em sistemas lineares) através da minimização de uma função custo dada, porém a segunda inclui observador de estados e minimização de ruídos.

Outro ponto importante na análise de sistemas de controle é que a estabilidade de um sistema pode estar restrita à uma região do espaço de estados, como é o caso de sistemas não lineares. Por isso, torna-se importante determinar a região de atração do ponto de equilíbrio assintoticamente estável, ou ao menos uma estimativa desta. A região de atração compreende todos os pontos do espaço de estados que serão levados ao ponto de equilíbrio quando o tempo tender ao infinito, e por outro lado, se o sistema passar a operar fora da região de atração, instabilizará. Portanto, podemos concluir que um sistema não necessita possuir estabilidade global desde que toda a sua faixa de

<sup>1</sup>Do inglês, *Linear Quadratic Regulator*.

<sup>2</sup>Do inglês, *Linear Quadratic Gaussian Control*.

<sup>3</sup>Estas normas são uma forma de medir o grau de influência de perturbações externas sobre as saídas de interesse.

operação esteja contida no interior de uma região estável do espaço de estados.

A definição formal de região de atração é como segue, segundo (KHALIL, 1996). Seja a origem  $x = 0$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema não linear

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.6)$$

com  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo a origem. Seja  $\psi(t, x)$  a solução de (2.6) que parte do estado inicial  $x$  no instante  $t = 0$ . A região de atração da origem, denotada por  $R_A$ , é definida por

$$R_A = \{x \in \mathcal{D} \mid \psi(t, x) \text{ é definida para } \forall t \geq 0 \text{ e } \psi(t, x) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\}. \quad (2.7)$$

A região de atração possui as propriedades de ser um conjunto invariante aberto e conectado e seu limite é formado por trajetórias. Portanto, uma forma de caracterizar  $R_A$  é determinar as trajetórias que passam sobre o seu limite. Um exemplo de região de atração é dado a seguir.

**Exemplo 2.1** *Considere o sistema de segunda ordem da equação de Van der Pol em tempo reverso, dado por (KHALIL, 1996):*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 1. \quad (2.8)$$

A Figura 1 mostra o plano de fase do sistema (2.8). Note que qualquer trajetória que se inicia no interior do ciclo limite, converge para o ponto de equilíbrio que é a origem. Neste caso, a região de atração é limitada, pois qualquer trajetória que parte em um ponto fora do ciclo limite, não consegue atravessá-lo para alcançar a origem.  $\square$

## 2.2.2 Desigualdade Matricial Linear - LMI

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma expressão do tipo  $F(g) > 0$  na qual  $F(g) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  é simétrica e afim<sup>4</sup> nas variáveis de busca representadas pelo vetor  $g$ . Por isso uma denominação mais precisa seria “Desigualdade Matricial Afim” (BOYD et al., 1994). Assim, uma LMI pode

<sup>4</sup>Uma função dita “afim” é aquela que não passa pela origem, ou seja, possui parte constante.

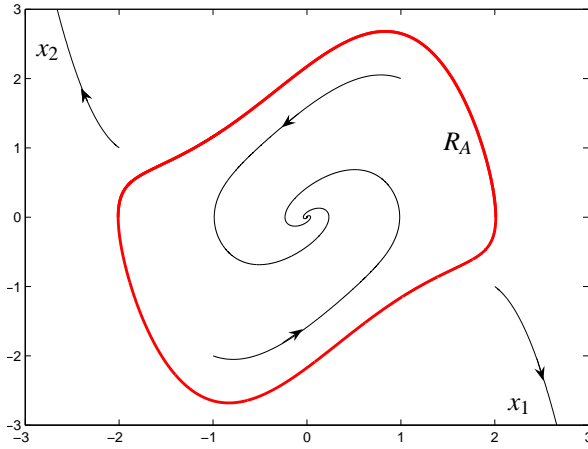


Figura 1: Região de atração do sistema (2.8).

ser genericamente representada por

$$F(g) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde  $F_i = F'_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$  são matrizes dadas e  $g_i$  são variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível). Quando existe uma solução  $g$  para  $F(g) > 0$  dizemos que a LMI é factível. Neste caso dizemos que  $F(g)$  é positiva definida e portanto todos os seus autovalores estão restritos a serem positivos na LMI, *i.e.*,  $x'F(g)x > 0$  para todo  $x$  não nulo  $\in \mathbb{R}^n$ .

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias maneiras e nem sempre aparece na forma afim (2.9). Entretanto, quando um elemento de busca é matricial, por exemplo, os próprios pacotes computacionais de solução de LMIs reorganizam o problema para ficar na forma afim (2.9). Detalhes sobre algoritmos e pacotes computacionais para resolução de LMIs podem ser encontrados em (EL GHAOUI; NICULESCU, 2000).

Inúmeros problemas de diferentes áreas do conhecimento podem ser reformulados e numericamente resolvidos através de LMIs (BOYD et al., 1994).

Nas Seções 2.2.2.1-2.2.2.5, a seguir são apresentadas algumas propriedades e operações de LMIs de interesse para este trabalho.

### 2.2.2.1 Um conjunto de LMIs é uma LMI

Múltiplas LMIs  $F_1(g) > 0, \dots, F_n(g) > 0$  podem ser expressas como uma única LMI  $[F_1(g), \dots, F_n(g)]_{diag} > 0$ . Portanto, neste trabalho, não será feita distinção entre um conjunto de LMIs e uma única LMI, *i.e.*, “a LMI  $F_1(g) > 0, \dots, F_n(g) > 0$ ” terá o mesmo significado que “a LMI  $[F_1(g), \dots, F_n(g)]_{diag} > 0$ ”.

Por exemplo, as duas LMIs  $F(g) > 0, G(g) < 0$  podem ser reescritas na forma de uma única LMI  $H(g) > 0$ , onde

$$H(g) = \begin{bmatrix} F(g) & 0 \\ 0 & -G(g) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.10)$$

ou seja,  $H(g) = H_0 + \sum_{i=1}^m g_i H_i > 0$ , com

$$H_0 = \begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & -G_0 \end{bmatrix} \quad H_i = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & -G_i \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

### 2.2.2.2 Convexidade

Uma importante propriedade de LMIs é a de que o conjunto de soluções destas também é um conjunto convexo. A prova é como segue: sejam  $y$  e  $z$  dois pontos que satisfazem a desigualdade 2.9, ou seja,  $F(y) > 0$  e  $F(z) > 0$ . Seja  $g = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , uma combinação convexa qualquer desses dois pontos obtida com algum  $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$ . Substituindo na definição, temos

$$\begin{aligned} F(g) &= F(\alpha y + (1 - \alpha)z) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i(\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m F_i(y_i - z_i) \\ &= (1 - \alpha)(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i) + \alpha(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i) \\ &= (1 - \alpha)F(z) + \alpha F(y), \end{aligned} \quad (2.12)$$

assim,  $g$  também é solução da LMI para todo  $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$  e vice-versa.

Esta propriedade é interessante do ponto de vista numérico pois temos garantia que o problema de encontrar uma solução qualquer de uma LMI, consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo. Problema este que pode ser resolvido de forma eficiente, com convergência global e tempo polinomial (COUTINHO, 2006). Mais detalhes sobre convexidade podem ser encontrados em (HINDI, 2004).

### 2.2.2.3 Complemento de Schur

Quando as matrizes  $F_i$  de (2.9) são diagonais, a LMI  $F(g) > 0$  é apenas um conjunto de desigualdades lineares. Desigualdades não lineares (convexas) podem ser convertidas para a forma LMI usando uma ferramenta matemática de manipulação matricial conhecida como complemento de Schur. A idéia básica é apresentada no Lema 2.1, a seguir.

**Lema 2.1 (Complemento de Schur)** *Seja  $g \in \mathbb{R}^m$  o espaço de variáveis de decisão,  $Q(g)$ ,  $R(g)$  e  $S(g)$  funções afim de  $g$  com  $Q(g)$  e  $R(g)$  simétricas. Então a LMI*

$$\begin{bmatrix} Q(g) & S(g) \\ S(g)' & R(g) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

*é equivalente à*

$$R(g) > 0, \quad Q(g) - S(g)R(g)^{-1}S(g)' > 0. \quad (2.14)$$

□

Em outras palavras, o conjunto de desigualdades não lineares em (2.14) pode ser representado como a LMI (2.13).

### 2.2.2.4 Lema de Finsler

Este lema é muito útil pois permite que restrições de igualdade sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI. Uma de suas versões é apresentada a seguir.

**Lema 2.2 (Lema de Finsler)** *Sejam  $C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q$  uma base para o espaço nulo de  $C$  e  $F(g)$  uma função afim em  $g \in \mathbb{R}^m$  com  $F(g) = F(g)'$  e*

$\mathbb{R}^{q \times q}$ . As seguintes condições são equivalentes:

$$a) \exists g : x'F(g)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^q : Cx = 0, \quad x \neq 0; \quad (2.15)$$

$$b) \exists g, L : F(g) + LC + C'L' < 0; \quad (2.16)$$

$$c) \exists g : Q'F(g)Q < 0; \quad (2.17)$$

$$d) \exists g, \beta : F(g) - \beta C'C < 0 \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Além disso, de maneira similar à equivalência entre (a) e (d), as seguintes condições são equivalentes:

$$e) \exists g : x'F(g)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^q : x'Mx = 0, \quad x \neq 0; \quad (2.19)$$

$$f) \exists g, \beta : F(g) + \beta M < 0 \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

□

Note que no Lema 2.2 as LMIs apresentadas são negativas definidas, portanto para aplicar o lema à uma LMI positiva definida, os sinais da LMI devem ser trocados antes. Algumas das equivalências apresentadas neste lema possuem prova não trivial e podem ser encontradas em (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001). Outro fator de interesse para este trabalho é que as variáveis matriciais apresentadas podem estar definidas para um conjunto politópico  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^q$ , ou seja,  $F(g, w)$ ,  $C(w)$ ,  $Q(w)$  e  $L(w)$ , e as condições continuam equivalentes para  $\forall w \in \mathcal{W}$ . A equivalência entre as condições (e) e (f) pode ser encontrada em (BOYD et al., 1994).

### 2.2.2.5 Procedimento-S

Quando uma LMI tem uma ou mais restrições de desigualdade, estas podem ser concatenadas em uma única LMI com a técnica conhecida como Procedimento-S se estas restrições advém de formas quadráticas (ou de funções quadráticas). Com esta técnica geramos uma LMI conservadora<sup>5</sup>, mas geralmente uma útil aproximação das restrições. Para diminuir o conservadorismo, são introduzidos multiplicadores como fatores de ponderação

<sup>5</sup>Significa que pode ser uma condição rígida para a solução numérica.



a serem determinados, tornando o problema mais flexível. O Procedimento-S para formas quadráticas é apresentado a seguir, e outras variantes, como para funções quadráticas, podem ser encontradas em (BOYD et al., 1994).

Sejam  $T_i, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas dadas e  $F(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma função afim em  $g$ . Considere o seguinte problema: encontre  $g$ , se possível, tal que

$$x'F(g)x > 0 \quad \forall x \neq 0 : \quad x'T_i x \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2.21)$$

É fácil perceber que se existem escalares  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e algum  $g$  tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \beta_i T_i > 0, \quad (2.22)$$

então (2.21) está satisfeita. Além disso não é trivial, porém útil, mostrar que as condições (2.21) e (2.22) são equivalentes para  $p = 1$ .

### 2.2.3 Polítopo

Um grande problema ao se trabalhar com sistemas incertos ou com não linearidades nos estados, é como tratar a incerteza ou o estado presente na formulação LMI final, pois pode-se inserir mais restrição na busca de solução do problema. Isso porque os valores dos parâmetros ou estados em um determinado instante de tempo são desconhecidos e a LMI pode estar satisfeita para um dado valor destes, mas o sistema pode (e normalmente irá) operar com outro valor, com o qual a solução encontrada para a LMI pode não garantir as condições de projeto.

Uma alternativa consiste em considerar estas variáveis em um polítopo<sup>6</sup>. Por exemplo, suponha que na LMI (2.9) um dos termos  $F_i$ , inicialmente considerado constante e de valor dado, seja agora uma função afim dos elementos incertos em  $\delta$ , ou seja,  $F_i(\delta)$ , onde

$$\delta \in \mathcal{D}^q = \{ \delta_i : \delta_i^{\min} \leq \delta_i \leq \delta_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, q \} \quad (2.23)$$

e, neste caso,  $\mathcal{D}^q$  representa um polítopo com  $2^q$  vértices, onde  $q$  é o número de incertezas do problema.

Com isso as matrizes  $F_i$  podem ser construídas para cada vértice do polítopo. Por exemplo, tendo-se duas incertezas,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , o polítopo pode ser

<sup>6</sup>Polítopo é um conjunto convexo fechado, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices, ou por desigualdades matriciais.

representado como na Figura 2, e neste caso a LMI inicial com incertezas pode ser substituída por 4 LMIs, uma para cada vértice, e em cada um  $F_i$  é constante como desejado.

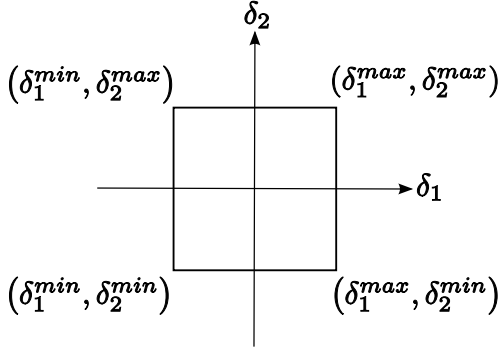


Figura 2: Representação de um polítopo.

Uma característica importante deste tipo de abordagem para descrever as incertezas é a convexidade do conjunto resultante, isto é, tem-se pela propriedade de convexidade que se as condições estão satisfeitas nos vértices então garante-se que todas as condições também estarão satisfeitas no interior desta região. Entretanto, surge o problema do crescimento exponencial das condições a serem testadas, pois para testarmos, por exemplo, as condições para um sistema com 3 elementos incertos, teremos que verificar  $2^3$  vértices, ou seja, tem-se que testar as condições 8 vezes.

É importante salientar que em problemas de controle, o tratamento politópico de parâmetros incertos confere robustez ao sistema com projeto via LMIs. As LMIs dependentes do estado podem ser tratadas da mesma maneira, desde que este apareça de forma afim nas desigualdades.

#### 2.2.4 Anuladores e LMIs dependentes dos estados

Problemas LMI dependentes do estado possuem conservadorismo adicional no sentido de que é utilizada uma das representações possíveis do sistema e desconsideradas as demais. Uma ferramenta que pode auxiliar na redução do conservadorismo, como será visto na sequência, é definida a seguir.

**Definição 2.1 (Anulador Linear)** Dada uma função vetorial  $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$ , uma função matricial  $\mathfrak{N}_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$  será chamada de um Anulador Linear de  $f$  se este satisfaz as duas seguintes condições **(i)**  $\mathfrak{N}_f(\cdot)$  é linear e **(ii)**  $\mathfrak{N}_f(\xi) f(\xi) = 0$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^q$  de interesse.  $\square$

Observe que a representação matricial do Anulador Linear não é única. Suponha que  $\xi = [\xi_1 \ \dots \ \xi_q]^\top \in \mathbb{R}^q$ . Uma representação simples de  $\mathfrak{N}_\xi(\xi) \in \mathbb{R}^{q-1 \times q}$  é mostrada abaixo.

$$\mathfrak{N}_\xi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 & -\xi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_q & -\xi_{q-1} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{N}_\xi(\xi)\xi = 0. \quad (2.24)$$

Levando em conta todos os possíveis pares  $\xi_i, \xi_j$  para  $i \neq j$  sem repetição, *i.e.* para  $\forall i, j \in \{1 \dots q\}$  com  $j > i$ , obtemos um anulador onde o número de linhas é  $r = \sum_{j=1}^{q-1} j$ , e que é dado pela seguinte fórmula:

$$\mathfrak{N}_\xi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & Y_1(\xi) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{(q-1)}(\xi) & Y_{(q-1)}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

com

$$\begin{aligned} Y_i(\xi) &= -\xi_i I_{(q-i)}, \quad i \in \{1 \dots q-1\} \\ \phi_1(\xi) &= [\xi_2 \ \dots \ \xi_q]^\top \\ \phi_i(\xi) &= \begin{bmatrix} \xi_{(i+1)} \\ \vdots \\ \xi_q \end{bmatrix}, \quad i \in \{2 \dots q-1\}. \end{aligned}$$

O conservadorismo de LMIs dependentes dos estados pode ser reduzido combinando o anulador à LMI com o Lema de Finsler. Para ilustrar este

problema, considere  $A(.) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definido como

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} -1 + \xi_2 + \xi_3 & 1 - \xi_2 & \xi_2 - \xi_3 \\ -1 - \xi_1 & -1 + \xi_3 + \xi_1 & 1 \\ -\xi_2 - \xi_1 & -\xi_2 - 1 & -1 + \xi_1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Considere agora dois sistemas obtidos de  $A(.)$  como se segue. O primeiro é o sistema linear incerto

$$\dot{x} = A(\delta)x, \quad \delta \in \mathcal{D} = \{\delta : |\delta_i| \leq \alpha, i \in \{1 \dots 3\}\}, \quad (2.27)$$

onde  $A(.)$  é a função em (2.26),  $x \in \mathbb{R}^3$  é o estado,  $\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]^\top \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  é o vetor de parâmetros incertos cuja magnitude é limitada por um dado escalar  $\alpha$ .

Considere também o sistema não linear

$$\dot{x} = A(x)x, \quad x \in \mathcal{X} = \{x : |x_i| \leq \gamma, i \in \{1 \dots 3\}\}, \quad (2.28)$$

onde  $A(.)$  é a função em (2.26),  $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^\top$  é o vetor de estados e  $\mathcal{X}$  é uma dada vizinhança ao redor da origem cujo tamanho pode ser ajustado através do escalar  $\gamma$ .

As condições de estabilidade quadrática para os sistemas (2.28), (2.27) são obtidas considerando uma função de Lyapunov quadrática  $v(x) = x'Px > 0$ ,  $P > 0$  da qual obtemos

$$\dot{v} = x'(A(\delta)'P + PA(\delta))x < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall \delta \in \mathcal{D}, \quad (2.29)$$

para (2.27) e para (2.28) é indicada abaixo.

$$\dot{v} = x'(A(x)'P + PA(x))x < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X} - \{0\}. \quad (2.30)$$

Resultados padrões da teoria LMI mostram que (2.29) é equivalente à LMI politópica dependente de parâmetro

$$A(\delta)'P + PA(\delta) < 0, \quad \forall \delta \in \mathcal{V}(\mathcal{D}), \quad (2.31)$$

que pode ser facilmente resolvida e o maior valor de  $\alpha$  que leva o sistema a ser quadraticamente estável é  $\alpha = 0.4160$ .

Para obter uma condição LMI de (2.30), considere que  $\mathfrak{K}_x(x)$  seja um anulador linear de  $x$ . Como  $\mathfrak{K}_x(x)x = 0$  podemos reescrever (2.30) como

$$x'(A(x)'P + PA(x))x < 0, \forall x \neq 0: \begin{cases} x \in \mathcal{X} \text{ and} \\ \mathfrak{K}_x(x)x = 0 \end{cases}, \quad (2.32)$$

e do Lema de Finsler obtemos o seguinte problema LMI dependente do estado

$$A(x)'P + PA(x) + L\mathfrak{K}_x(x) + \mathfrak{K}_x(x)'L' < 0, \forall x \in \mathfrak{V}(\mathcal{X}), \quad (2.33)$$

onde  $L$  é uma variável de escalonamento a ser determinada de modo a reduzir o conservadorismo do resultado. O problema LMI politópico dependente do estado em (2.33) pode ser facilmente resolvido e o maior valor de  $\gamma$  de (2.28), correspondendo à maior vizinhança  $\mathcal{X}$  para a qual (2.33) é satisfeita, é indicada abaixo, juntamente com o anulador  $\mathfrak{K}_x(x)$ .

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \end{bmatrix} \\ \gamma = 0.9296 & \gamma = 0.9999 \\ (a) & (b) \end{array} \quad (2.34)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{bmatrix} \\ \gamma = 0.7141 & \gamma = \infty \\ (c) & (d) \end{array}$$

Como esperado, as maiores dimensões do anulador no caso (d), obtidos de (2.25), levaram a um resultado menos conservador graças ao maior número de variáveis de escalonamento que podem ser usados quando aplicado o Lema de Finsler. No caso (d) obtemos  $\gamma = \infty$ , portanto (2.33) é satisfeita  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ . De fato, escolhendo

$$L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = I_3, \quad (2.35)$$

obtemos

$$A(x)'P + PA(x) + L\mathfrak{K}_x(x) + \mathfrak{K}_x(x)'L' = -2I_3. \quad (2.36)$$

Então o sistema (2.28) é globalmente quadraticamente estável e  $v(x) = x'x$  é a função de Lyapunov que prova isso. Graças ao anulador linear e ao Lema de

Finsler foi possível reduzir significativamente o conservadorismo das LMIs dependentes do estado. Além do mais, note que a LMI dependentes do estado (2.33) se torna identica à LMI dependente de parâmetro (2.31) com a escolha  $L = 0$  e neste caso obtemos  $\gamma = \alpha = 0.4164$  que é um resultado muito conservador.

Resultados preliminares enfatizando as vantagens de usar o Lema de Finsler e anuladores do tipo (2.24) podem ser encontrados em (TROFINO, 2000), (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008). A partir do exemplo visto anteriormente, pode-se concluir que regiões de atração menos conservadoras podem ser obtidas usando uma versão mais geral do anulador, como indicado na Equação (2.25).

### 2.3 Representação do sistema

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \delta), \quad x_0 \in \mathcal{X}, \quad \delta \in \mathcal{D}, \quad \dot{\delta} \in \check{\mathcal{D}}, \quad (2.37)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $\delta \in \mathbb{R}^d$  é um vetor de parâmetros incertos,  $f(x, \delta)$  é uma função vetorial contínua com  $f(0, \delta) = 0$ .  $\mathcal{X}$  é um dado politopo, não necessariamente simétrico nem invariante, que contém a origem e representa um conjunto desejado de estados iniciais a serem considerados na análise de estabilidade.  $\mathcal{D}, \check{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^d$  são politopos dados representando os limites de magnitude do parâmetro  $\delta$  e sua taxa de variação ( $\dot{\delta}$ ). A notação  $(x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  significa que  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\delta \in \mathcal{D}$  e  $\dot{\delta} \in \check{\mathcal{D}}$ .

É de interesse determinar uma função de Lyapunov  $v(x, \delta)$  adequada que satisfaça as seguintes condições para o sistema (2.37)  $\forall (x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$ .

$$\phi_3(\|x\|) \leq v(x, \delta) := x' \mathbf{P}(x, \delta) x \leq \phi_1(\|x\|)$$

$$\dot{v}(x, \delta) = x' \dot{\mathbf{P}}(x, \delta) x + f(x, \delta)' \mathbf{P}(x, \delta) x + x' \mathbf{P}(x, \delta) f(x, \delta) \leq -\phi_2(\|x\|), \quad (2.38)$$

onde  $\phi_1(\cdot)$ ,  $\phi_2(\cdot)$ ,  $\phi_3(\cdot)$  são funções de classe  $\mathcal{K}^7$  e  $\mathbf{P}(\cdot)$  é simétrica. Tais condições implicam em estabilidade assintótica local da origem (KHALIL, 1996).

A complexidade de  $\mathbf{P}(x, \delta)$  é um aspecto importante da função de

---

<sup>7</sup>Uma função  $\phi : [0, a) \mapsto \mathbb{R}^+$  é dita ser de classe  $\mathcal{K}$  se  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(\cdot)$  é contínua e estritamente crescente no intervalo de definição.

Lyapunov. Se por um lado o esforço computacional para resolver numericamente o problema de estabilidade cresce com a complexidade da função de Lyapunov, por outro resultados menos conservadores são esperados. Aqui é considerada uma função de Lyapunov que pode ser uma função racional dos estados e parâmetros incertos. Várias classes importantes de funções, como polinômios de qualquer tipo, podem ser representados desta forma.

Suponha que o sistema (2.37) possa ser representado como indicado abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \delta) = A_0 x + A_1 \pi & x_0 &\in \mathcal{X} \\ 0 &= G(x, \delta)x + F(x, \delta)\pi & \delta &\in \mathcal{D}, \dot{\delta} \in \check{\mathcal{D}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

- $A_0, A_1$  são matrizes constantes da estrutura.
- $\pi \in \mathbb{R}^p$  é um vetor de funções não lineares. A dependência de  $\pi$  com respeito à  $(x, \delta)$  será omitida para simplificar a notação.
- $G(x, \delta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $F(x, \delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  são funções matriciais afim de  $(\delta, x)$ .

As seguintes considerações são feitas:

**Suposição 2.1 :**  $f(x, \delta)$  é uma função contínua de  $(x, \delta)$ ,  $\forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$  com  $f(0, \delta) = 0$  para todo  $\delta$  de interesse. Este pressuposto se refere à existência e unicidade das soluções da equação diferencial na vizinhança  $\mathcal{X}$  do ponto de equilíbrio  $x = 0$ .

**Suposição 2.2 :** A matriz  $F(x, \delta)$  é inversível para todos os valores de  $(x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$ . Sob esta suposição de regularidade, a decomposição (2.39) de  $f(x, \delta)$  em termos da função não linear  $\pi$  é bem posta,  $f(x, \delta) = (A_0 - A_1 F(x, \delta))^{-1} G(x, \delta)x$ .

Para ilustrar as ideias por trás da decomposição na representação do sistema (2.39), considere o sistema polinomial escalar  $\dot{x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ . Defina  $\pi = [x^2 \ x^3]'$ . Então, obtém-se  $\dot{x} = A_0 x + A_1 \pi$  com  $A_0 = a_1$  e  $A_1 = [a_2 \ a_3]$ . Além do mais, os elementos de  $\pi$  são tais que  $\pi_1 = x^2$  e  $\pi_2 = x \pi_1$  levando à  $G(x)x + F(x)\pi = 0$  com

$$G(x) = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere agora o sistema racional escalar

$$\dot{x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + z(x), \quad z(x) = \frac{a_4 x}{b_0 + b_1 x},$$

onde  $b_0 + b_1 x \neq 0$  é uma condição de regularidade necessária para a função racional  $z(x)$ . Esta condição de regularidade nos permite redefinir a função

racional como uma equação polinomial aumentada  $z(b_0 + b_1x) - a_4x = 0$  nas variáveis  $z, x$ . Definindo a função não linear  $\pi = [x^2 \ x^3 \ z \ zx]'$ , o sistema racional pode ser decomposto como  $\dot{x} = A_0x + A_1\pi$  com  $A_0 = a_1$ ,  $A_1 = [a_2 \ a_3 \ 1 \ 0]$  e

$$G(x) = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ -a_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe a condição  $\det(F(x)) = b_0 + b_1x \neq 0$ , que vem da Suposição 2.2, é correspondente à condição de regularidade da representação original do sistema.

A classe de sistema incerto não linear (2.39) é geral o suficiente para incluir a Representação Fracional Linear (LFR)<sup>8</sup> de (EL GHOU; SCORLETTI, 1996). A LFR tem a forma  $f(x, \delta) = M_1x + M_2(I + M_3)^{-1}M_4x$ , onde as matrizes  $M_1$ ,  $M_4$  são fixas e  $M_2$ ,  $M_3$  são funções afim de  $(x, \delta)$  e  $I + M_3$  deve ser inversível para todos os valores de  $(x, \delta)$  de interesse. Com as funções auxiliares  $\pi_1 = (I + M_3)^{-1}M_4x$  e  $\pi_2 = M_2\pi_1$  pode-se representar a LFR como em (2.39) com  $f(x, \delta) = M_1x + \pi_2$  e a restrição

$$0 = \begin{bmatrix} -M_4 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I + M_3 & 0 \\ -M_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que o modelo (2.39) tem a forma de um sistema descritor no qual as equações diferenciais e algébricas são desacopladas (VERGHESE; LÉVI; KAILATH, 1981), (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008). Veja também (ITO, 1999), cujos resultados de estabilidade para uma classe de sistemas racionais incertos é relacionada com uma função de Lyapunov racional dependente de parâmetro.

Finalmente, observe que a decomposição de  $f(x, \delta)$  em termos de  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $G(x, \delta)$ ,  $F(x, \delta)$  não é única, em geral. Então, é natural se perguntar qual seria o impacto de usar uma dada representação particular do sistema nos resultados de estabilidade apresentados nas próximas seções. Alguns elementos de resposta podem ser encontrados na Seção 2.2.4 onde a importância de combinar o Lema de Finsler com os Anuladores Lineares é enfatizada. Este ponto será abordado com mais profundidade na próxima seção.

---

<sup>8</sup>Do inglês, *Linear Fractional Representation*.



## 2.4 Condições para estabilidade local

Nesta seção são apresentadas as condições LMI para estabilidade local da origem do sistema (2.39). Supõe-se que os politopos  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{J}$  são dados. O problema a ser resolvido é encontrar, se possível, uma função de Lyapunov  $v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta) x$  que satisfaça as condições (2.38) ponto a ponto para  $\forall (x, \delta, \delta') \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ .

Considere o sistema (2.39) sob as Suposições 2.1, 2.2 e a função de Lyapunov candidata

$$v(x, \delta) := \pi_b' P \pi_b = x' \mathbf{P}(x, \delta) x \quad \pi_b := \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} \quad P = P', \quad (2.40)$$

onde  $G(x, \delta)x + F(x, \delta)\pi = 0$  é como em (2.39),  $P \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  é uma matriz simétrica a ser determinada e

$$\mathbf{P}(x, \delta) = \begin{bmatrix} I_n & \\ -F(x, \delta)^{-1}G(x, \delta) & \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_n & \\ -F(x, \delta)^{-1}G(x, \delta) & \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Com a escolha apropriada do vetor de funções não lineares  $\pi$ , pode-se considerar qualquer tipo de função de Lyapunov racional. Por exemplo, a bem conhecida função de Lyapunov quadrática  $v(x) = x' P_0 x$ , com  $P_0 > 0$ , corresponde à escolha

$$P = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix}' P_0 \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Funções de Lyapunov polinomiais do tipo SOS são obtidas com a restrição  $P > 0$ .

Seja a matriz  $C_b$  definida como

$$C_b(x, \delta) = \begin{bmatrix} G(x, \delta) & F(x, \delta) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

e observe de (2.39) que  $C_b(x, \delta)$  é afim com respeito à  $(x, \delta)$  e satisfaz

$$C_b(x, \delta) \pi_b = 0, \quad \pi_b := [x, \pi]_{col}. \quad (2.44)$$

Observe da Suposição 2.2, que o vetor  $\pi$  é unicamente determinado de  $(x, \delta)$  através da relação  $\pi = -F(x, \delta)^{-1}G(x, \delta)x$ . Porém, como mencionado anteriormente, existem vários pares de matrizes  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$  que poderiam ser usados para caracterizar a mesma função  $\pi$ . Neste contexto, os anuladores lineares  $\mathfrak{K}_x(x)$ ,  $\mathfrak{K}_\pi(x, \delta)$  desempenham um papel importante.

Como

$$\aleph_x(x)x = 0, \forall x \in \mathcal{X} \quad \aleph_\pi(x, \delta)\pi = 0, \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}, \quad (2.45)$$

pode-se definir

$$\Gamma_b(x, \delta) := M_b \aleph_{\pi_b}(x, \delta) + \aleph_{\pi_b}(x, \delta)' M_b' \quad (2.46)$$

$$\aleph_{\pi_b}(x, \delta) := [\aleph_x(x), \aleph_\pi(x, \delta)]_{diag} \in \mathbb{R}^{(s_b) \times (n+p)}, \quad (2.47)$$

onde  $M_b \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (s_b)}$  é uma matriz de escalonamento livre a ser determinada e note que  $\pi_b' \Gamma_b(x, \delta) \pi_b = 0$  onde  $\pi_b = [x, \pi]_{col}$ .

Dos resultados da Seção 2.2.4, e das propriedades de convexidade das LMIs, é possível verificar que a existência de  $P = P' \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ ,  $L_b \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (p)}$ ,  $M_b \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (s_b)}$  satisfazendo a LMI

$$P + L_b C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)' L_b' + \Gamma_b(x, \delta) > 0 \quad \forall (x, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{D}) \quad (2.48)$$

é uma condição suficiente para a positividade de  $v(x, \delta)$  de (2.40)  $\forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$ .

**Observação 2.4.1** Observe que ambos  $C_b(x, \delta)$ ,  $\aleph_{\pi_b}(x, \delta)$  podem ser vistos como anuladores lineares de  $\pi_b$ , pois  $C_b(x, \delta)\pi_b = 0$  e  $\aleph_{\pi_b}(x, \delta)\pi_b = 0$ . Contudo, estas matrizes desempenham papéis diferentes na condição (2.48). Enquanto a primeira é associada com o par particular de matrizes  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$  usados para caracterizar a função  $\pi$ , o segundo introduz graus de liberdade adicionais, representados pela matriz de escalonamento  $M_b$ , para aliviar o impacto da não unicidade de  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$ .  $\square$

Na sequência, a derivada temporal de  $v(x, \delta)$  leva à

$$\dot{v}(x, \delta) = 2 \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} A_0 x + A_1 \pi \\ \dot{\pi} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

onde  $\dot{\pi}$  é um vetor que satisfaz a seguinte relação

$$\dot{F}(x, \delta)\pi + F(x, \delta)\dot{\pi} + \dot{G}(x, \delta)x + G(x, \delta)(A_0 x + A_1 \pi) = 0. \quad (2.50)$$

Sabendo que as matrizes  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$  são funções afim de  $(x, \delta)$ , como indicado em (2.39), obtém-se

$$\dot{F}(x, \delta) = \bar{F}(\dot{x}) + \tilde{F}(\dot{\delta}) \quad \dot{G}(x, \delta) = \bar{G}(\dot{x}) + \tilde{G}(\dot{\delta}). \quad (2.51)$$

Agora observe que o termo  $\bar{F}(\dot{x})\pi$  que aparece em (2.50), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\bar{F}(\dot{x})\pi &= \sum_{j=1}^n \bar{F}_j \dot{x}_j \pi = - \sum_{j=1}^n \bar{F}_j \dot{x}_j F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta) x = \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{F}_j F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta) \mu_j, \quad (2.52)\end{aligned}$$

onde

$$\mu_j = -x\dot{x}_j = -xE_j\dot{x} = -xE_j(A_0x + A_1\pi), \quad E_j := \text{lin}_j(I_n). \quad (2.53)$$

E introduzindo uma outra mudança de variáveis

$$\eta_j := F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta) \mu_j, \quad (2.54)$$

obtém-se

$$\bar{F}(\dot{x})\pi = \sum_{j=1}^n \bar{F}_j \eta_j = \bar{F}_a \eta, \quad \eta = [\eta_i]_{col}^n, \quad \bar{F}_a = [\bar{F}_i]_{lin}^n. \quad (2.55)$$

O termo  $\bar{G}(\dot{x})x$  que aparece em (2.50), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\bar{G}(\dot{x})x &= \sum_{j=1}^n \bar{G}_j \dot{x}_j x = \sum_{j=1}^n \bar{G}_j x E_j \dot{x} = \bar{G}_a(x) \dot{x} = \bar{G}_a(x) (A_0x + A_1\pi), \\ \bar{G}_a(x) &:= \sum_{j=1}^n \bar{G}_j x E_j. \quad (2.56)\end{aligned}$$

Com as expressões anteriores pode-se reescrever (2.50) como

$$\bar{F}_a \eta + \tilde{F}(\dot{\delta})\pi + F(x, \delta)\dot{\pi} + (\bar{G}_a(x) + G(x, \delta))(A_0x + A_1\pi) + \tilde{G}(\dot{\delta})x = 0, \quad (2.57)$$

onde  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$  tem a estrutura proveniente da decomposição (2.39) e

$$\begin{aligned}\mu &= [\mu_i]_{col}^n = -E_b(x)(A_0x + A_1\pi) & F_b(x, \delta) &:= [F(x, \delta)]_{diag}^n \\ E_b(x) &:= [xE_i]_{col}^n, \quad E_i := \text{lin}_i(I_n) & G_b(x, \delta) &:= [G(x, \delta)]_{diag}^n \\ F_b(x, \delta)\eta &= G_b(x, \delta)\mu & \bar{G}_a(x) &:= \sum_{i=1}^n \bar{G}_i x E_i, \quad \bar{F}_a := [\bar{F}_i]_{lin}^n\end{aligned} \quad (2.58)$$

A derivada temporal de  $v(x, \delta)$  indicada em (2.49) pode ser reescrita como

$$\dot{v}(x, \delta) = \pi_a'(P_a + P_a')\pi_a, \quad (2.59)$$

onde

$$\pi_a = [x, \pi, \tilde{\pi}, \mu, \eta]_{col} \quad (2.60)$$

$$P_a := \begin{bmatrix} PA_a \\ 0_{(p+n^2+np) \times (n+2p+n^2+np)} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$A_a := \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & 0_{n \times p} & 0_{n \times (n^2+np)} \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} & I_p & 0_{p \times (n^2+np)} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Observe que  $n, p$  são as dimensões de  $x, \pi$  respectivamente. Para representar o sistema e a função de Lyapunov foram usados os vetores  $x, \pi$ . Todavia, a derivada temporal de  $v(x, \delta)$  apresenta um crescimento de complexidade e mudanças de variável extras se fazem necessárias, chamadas de  $\tilde{\pi}, \mu, \eta$ , com dimensões  $p, n^2, np$  respectivamente, de modo a tornar as expressões afim em  $x, \delta, \dot{\delta}$ .

Rearranjando em uma única expressão todas as relações entre os vetores  $x, \pi, \tilde{\pi}, \mu, \eta$  obtém-se  $C_a(x, \delta, \dot{\delta})\pi_a = 0$  onde

$$C_a(x, \delta, \dot{\delta}) := \begin{bmatrix} G(x, \delta) & F(x, \delta) & 0_{p \times p} & 0_{p \times n^2} & 0_{p \times np} \\ W_1(x, \delta, \dot{\delta}) & W_2(x, \delta, \dot{\delta}) & F(x, \delta) & 0_{p \times n^2} & \tilde{F}_a \\ W_3(x) & W_4(x) & 0_{n^2 \times p} & I_{n^2} & 0_{n^2 \times np} \\ 0_{np \times n} & 0_{np \times p} & 0_{np \times p} & -G_b(x, \delta) & F_b(x, \delta) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} W_1(x, \delta, \dot{\delta}) &= \tilde{G}_a(x)A_0 + \tilde{G}(\dot{\delta}) + G(x, \delta)A_0 & W_3(x) &= E_b(x)A_0 \\ W_2(x, \delta, \dot{\delta}) &= \tilde{G}_a(x)A_1 + \tilde{F}(\dot{\delta}) + G(x, \delta)A_1 & W_4(x) &= E_b(x)A_1 \end{aligned}$$

Para aliviar o impacto da não unicidade da representação (2.58) na caracterização de  $\pi_a$  em (2.60), observe que de (2.47) obtém-se que  $\pi_a'\Gamma_a(x, \delta)\pi_a = 0$  onde

$$\Gamma_a(x, \delta) := M_a \aleph_{\pi_a}(x, \delta) + \aleph_{\pi_a}(x, \delta)'M_a' \quad (2.64)$$

$$\aleph_{\pi_a}(x, \delta) := \begin{bmatrix} \aleph_{\pi_b}(x, \delta) & 0_{sb \times p+n^2+np} \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

onde  $\aleph_{\pi_a}(x, \delta) \in \mathbb{R}^{sb \times (n+2p+n^2+np)}$  é o anulador linear de  $\pi_a$  em (2.60) e  $M_a$  é uma matriz de escalonamento livre a ser determinada de modo a reduzir o conservadorismo associado à não unicidade da representação (2.39). As

matrizes  $C_a(x, \delta, \dot{\delta})$ ,  $\mathbf{\kappa}_{\pi_a}(x, \delta)$  podem ser vistas como anulares de  $\pi_a$ , mas, como na Observação 2.4.1, elas desempenham papéis diferentes no problema.

Como  $C_a(x, \delta, \dot{\delta})\pi_a = 0$  e  $\pi'_a \Gamma_a(x, \delta)\pi_a = 0$ , de (2.59) e do Lema de Finsler obtém-se a seguinte condição LMI suficiente para a negatividade de  $\dot{v}(x, \delta)$ :

$$P_a + P'_a + C_a(x, \delta, \dot{\delta})'L'_a + L_a C_a(x, \delta, \dot{\delta}) + \Gamma_a(x, \delta) < 0 \quad (2.66)$$

$$\forall (x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathfrak{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}),$$

onde  $L_a, M_a$  são matrizes de escalonamento livres com as mesmas dimensões de  $C'_a, \mathbf{\kappa}'_{\pi_a}$  e devem ser determinadas juntamente com  $P$  que caracteriza  $P_a$  em (2.62). Se a LMI (2.66) é satisfeita para algum  $L_a, M_a, P$ , então a função  $\dot{v}(x, \delta)$  satisfaz a condição (2.38).

Com os resultados acima pode-se estabelecer o teorema a seguir.

**Teorema 2.2** *Considere o sistema não linear incerto (2.39) com as Suposições 2.1, 2.2 e admita que os politopos  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\check{\mathcal{D}}$  são dados. Suponha que existam matrizes  $P, L_a, M_a, L_b, M_b$  que satisfaçam as LMIs (2.48), (2.66) para  $(x, \delta, \dot{\delta})$  nos vértices do politopo  $\mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$ . Então a origem do sistema (2.39) é localmente assintoticamente estável e  $v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta)x$  com a estrutura (2.41) é uma função de Lyapunov que prova a estabilidade local.*

**Prova:** Suponha agora que as condições do Teorema 2.2 estão satisfeitas. Então, por convexidade, elas estão também satisfeitas para  $\forall (x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$ . Defina as seguintes constantes positivas

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \max_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}(P + L_b C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)'L'_b + \Gamma_b(x, \delta)) \\ \varepsilon_3 &= \min_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}} \underline{\lambda}(P + L_b C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)'L'_b + \Gamma_b(x, \delta)) \\ \varepsilon_2 &= \max_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}(M' M), \quad M := F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta), \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde  $\bar{\lambda}(\cdot)$ ,  $\underline{\lambda}(\cdot)$  denotam o máximo e mínimo autovalores de  $(\cdot)$ .

Como  $P + L_b C_b + C'_b L'_b + \Gamma_b > 0$ , vamos multiplicar esta desigualdade por  $\pi_b := [x, \pi]_{col}$  pela direita e pela sua transposta pela esquerda. Sabendo que  $C_b \pi_b = 0$ ,  $\pi'_b \Gamma_b \pi_b = 0$  e  $\pi'_b P \pi_b = x' \mathbf{P}(x, \delta)x$ , como  $\pi = -F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta)x$  obtém-se

$$\varepsilon_3 \|\pi_b\|^2 \leq v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta)x \leq \varepsilon_1 \|\pi_b\|^2 \quad \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}. \quad (2.68)$$

Por outro lado,

$$\|x\|^2 \leq \|\pi_b\|^2 \leq (\varepsilon_2 + 1)\|x\|^2, \quad \forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}. \quad (2.69)$$

Portanto  $v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta) x$  satisfaz os limites em (2.38)  $\forall (x, \delta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D}$  com

$$\phi_3 = \varepsilon_3 \|x\|^2, \quad \phi_1 = \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + 1) \|x\|^2. \quad (2.70)$$

Argumentos similares são usados para mostrar os limites em  $\dot{v}(x, \delta)$ . Defina a constante positiva  $\varepsilon_4$  como

$$\varepsilon_4 = \min_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}, \dot{\delta} \in \check{\mathcal{D}}} \underline{\lambda}(-N), \quad N := P_a + P'_a + C_a(x, \delta, \dot{\delta})' L'_a + L_a C_a(x, \delta, \dot{\delta}) + \Gamma_a(x, \delta). \quad (2.71)$$

Lembrando de (2.60), (2.63), (2.64) que  $C_a \pi_a = 0$ ,  $\pi'_a \Gamma_a \pi_a = 0$ . Então de (2.59), (2.66), (2.71) obtém-se

$$\dot{v}(x, \delta) = \pi'_a N \pi_a \leq -\varepsilon_4 \|\pi_a\|^2. \quad (2.72)$$

Como  $\|\pi_a\|^2 = \|x\|^2 + \|\pi\|^2 + \|\tilde{\pi}\|^2 + \|\mu\|^2 + \|\eta\|^2$  concluímos que  $\|\pi_a\|^2 > \|x\|^2$  sempre que  $\|x\| \neq 0$ , o que por sua vez implica em

$$\dot{v}(x, \delta) < -\varepsilon_4 \|x\|^2, \quad (2.73)$$

e pode-se concluir que  $\dot{v}(x, \delta)$  satisfaz os limites em (2.38)  $\forall (x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  com

$$\phi_2 = \varepsilon_4 \|x\|^2, \quad (2.74)$$

o que completa a prova.  $\square$

**Corolário 2.1** *O sistema não linear incerto (2.39) é localmente exponencialmente estável sempre que as condições LMI do Teorema 2.2 são estritamente satisfeitas e os conjuntos  $\mathcal{X}$  de condições iniciais e  $\mathcal{D}$  de parâmetros incertos são limitados.*

**Prova:** O resultado segue diretamente de (2.70), (2.67) e da limitação de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{D}$ . Neste caso  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  são constantes limitadas. A positividade de constantes pequenas  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  são sempre garantidas, pois as LMIs são estritas. A prova é completada de (KHALIL, 1996).  $\square$

Para problemas de estabilidade global, o Corolário 2.1 não pode ser usado porque  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  não é limitado. Entretanto, o Teorema 2.2 pode ser

adaptado para lidar com este problema, como mostrado na Seção 2.6.

**Observação 2.4.2** *Tendo em vista o Corolário 2.1, segue que as condições LMI do Teorema 2.2 nunca serão satisfeitas para sistemas que são localmente assintoticamente estáveis mas não localmente exponencialmente estáveis. Esta limitação aparece porque a LMI (2.66) deve ser satisfeita estritamente. Se a estritividade de (2.66) é removida, i.e. (2.66) é substituída pela condição LMI não estrita*

$$P_a + P'_a + C_a(x, \delta, \check{\delta})' L'_a + L_a C_a(x, \delta, \check{\delta}) + \Gamma_a(x, \delta) \leq 0 \quad (2.75)$$

$$\forall (x, \delta, \check{\delta}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}),$$

e obtém-se uma versão mais geral do Teorema 2.2, em que os problemas de estabilidade local não são tratados como problemas de estabilidade exponencial. Observe neste caso que as condições do Corolário 2.1 não são satisfeitas. Em particular, obtém-se  $\varepsilon_4 = 0$  que permite ao método explorar os graus de liberdade em (2.75) de modo a obter uma função  $\phi_2(\|x\|)$  em (2.38) que não é proporcional à  $\|x\|^2$  próximo da origem. Observe de (2.70) que  $\phi_3(\|x\|)$  e  $\phi_1(\|x\|)$  são proporcionais à  $\|x\|^2$  próximo da origem. Os resultados de estabilidade assintótica do Teorema 2.2 com (2.66) substituído por (2.75) ainda se mantém, assim como  $\dot{v}(x, \delta) < 0$  de (2.73). Esses pontos são ilustrados no Exemplo 2.5.  $\square$

**Observação 2.4.3** *Observe que na estabilidade local o conjunto de condições iniciais  $\mathcal{X}$  pode ser assumido como uma pequena vizinhança arbitrária do ponto de equilíbrio (aqui assumido como sendo a origem). Lembrando que as LMIs do Teorema 2.2 são estritas, então pequenas perturbações são sempre possíveis, então a partir das propriedades de convexidade tem-se que as LMIs do Teorema 2.2 são satisfeitas para uma pequena vizinhança arbitrária  $\mathcal{X}$  se e apenas se elas são satisfeitas para  $\mathcal{X} = \{0\}$ . Para o caso em que (2.66) é substituído por (2.75), como discutido na observação anterior, é necessário que a LMI dependente do estado (2.75) seja negativa semi-definida para  $x = 0$ . Caso contrário, a estabilidade exponencial local segue de uma vizinhança suficientemente pequena de  $x = 0$ . Quando  $\mathcal{X} = \{0\}$ , o número de vértices do politopo  $\mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  é reduzido para um de  $\mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  e por consequência o número de LMIs e variáveis de decisão do teorema são reduzidos. Além do mais, o Teorema 2.2 com  $\mathcal{X} = \{0\}$  leva ao caso onde  $F(x, \delta)$ ,  $G(x, \delta)$  são independentes de  $x$ . Isso implica que os únicos elementos não nulos de  $\pi$  são aqueles que dependem de  $\delta$  mas lineares em  $x$  como  $\pi = -F(0, \delta)^{-1}G(0, \delta)x$ . Portanto*

a função de Lyapunov (2.40) assume a forma de uma função de Lyapunov dependente de parâmetro,  $v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(\delta)x$ , que é uma forma quadrática em  $x$  e  $\mathbf{P}(\delta)$  é uma função matricial racional de  $\delta$ . Funções de Lyapunov dependentes de parâmetro similares são utilizadas em (TROFINO; DE SOUZA, 1999) onde  $\mathbf{P}(\delta)$  é quadrática em  $\delta$  e (CHESI et al., 2004) onde  $\mathbf{P}(\delta)$  é uma função polinomial de  $\delta$ .  $\square$

**Observação 2.4.4** Um ponto importante é que o Teorema 2.2 é baseado na abordagem politópica. A vantagem desta abordagem é que ela não traz conservadorismo adicional ao problema, mas é obtida ao custo de aumentar exponencialmente o número de LMIs com o número de elementos de  $(x, \delta, \dot{\delta})$ , mais precisamente  $2^{n+p}$  para (2.48) e  $2^{n+2p}$  (pior caso) para (2.66).  $\square$

## 2.5 Condições e região de atração para estabilidade regional

Nesta seção é tratado o problema de determinar uma estimativa da região de atração. A ideia básica é usar os resultados de estabilidade do Teorema 2.2 e determinar uma função de Lyapunov tal que sua maior curva de nível dentro de um dado conjunto de condições iniciais  $\mathcal{X}$  é maximizado de alguma forma. Primeiramente, é considerado na Seção 2.5.1 o caso onde  $\mathcal{X}$  é um politopo. Como a função de Lyapunov permite a dependência parâmetros incertos do sistema, a curva de nível de  $v(x, \delta)$  é também dependente de parâmetro. Na Seção 2.5.2 é mostrado como obter estimativas que são independentes dos parâmetros incertos. O caso onde  $\mathcal{X}$  é uma união de politopos é tratado na Seção 2.5.3.

### 2.5.1 Conjunto convexo $\mathcal{X}$ de estados iniciais

Considerando que  $\mathcal{X}$  é um politopo que pode ser descrito como o envoltório convexo de seus vértices ou, equivalentemente, como a interseção de semi-espacos (ou semi-planos quando em apenas duas dimensões) como a seguir:

$$\mathcal{X} = \text{Co}\{v_i, i \in \{1 \dots h\}\} = \{x : a'_k x \leq 1, k \in \{1 \dots g\}\}, \quad (2.76)$$

onde  $h$  é o número de vértices  $v_i \in \mathbb{R}^n$  do politopo  $\mathcal{X}$  e  $a_k \in \mathbb{R}^n$  são vetores dados associados às  $g$  faces  $\mathcal{F}_k$  do politopo definidas como

$$\mathcal{F}_k = \{x \in \mathcal{X} : a'_k x = 1\}, k \in \{1 \dots g\}. \quad (2.77)$$



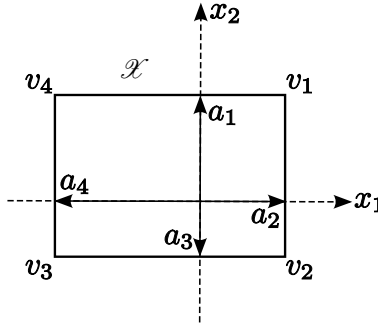


Figura 3: Vértices  $v_i$  e vetores  $a_k$  das faces do polígono  $\mathcal{X}$  para  $x = [x_1 \ x_2]'$ .

Com a notação em (2.40), (2.41) considere a região (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985)

$$\mathcal{E} = \left\{ x : v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta) x \leq 1 \quad \forall \delta \in \mathcal{D} \right\}, \quad (2.78)$$

e note que a superfície de  $\mathcal{E}$  é caracterizada pela função racional dos estados parametrizados em termos de  $\delta$ . O problema a ser resolvido é então determinar a maior  $\mathcal{E}$  possível que se encontra dentro do polígono  $\mathcal{X}$ . Como  $\mathcal{X}$  é fechado e contém a origem, a condição de inclusão é satisfeita se (e somente se) a curva de nível de  $v(x, \delta)$  é maior que a unidade para todos os pontos na superfície de  $\mathcal{X}$ , *i.e.*

$$v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta) x > 1, \quad \forall x \in \mathcal{F}_k, \quad \forall k \in \{1 \dots g\}. \quad (2.79)$$

Com (2.48),  $\pi_b$  de (2.44) e  $\mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta)$  de (2.47), considere a notação

$$\begin{aligned} \pi_c &= \begin{bmatrix} \pi_b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} a'_k C_0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [I_n \ 0_{n \times p}], \\ P_{c_k}(x, \delta) &= \begin{bmatrix} P + L_{b_k} C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)' L'_{b_k} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{c_k}(x, \delta) &= \begin{bmatrix} M_{b_k} \mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta) + \mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta)' M'_{b_k} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad N_{c_k} \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix}' N'_{c_k}, \end{aligned}$$

onde  $M_{b_k} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times s_b}$ ,  $N_{c_k} \in \mathbb{R}^{(n+p+1) \times n}$ ,  $L_{b_k} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ , para  $k \in \{1 \dots g\}$

são matrizes a serem determinadas juntamente com  $P$ . Observe que  $\aleph \pi_b(x, \delta) \pi_b = 0$  e  $C_0 \pi_b = x$  o que por sua vez implica em  $\pi_c' \Gamma_{c_k}(x, \delta) \pi_c = 0, \forall x, k$ .

Usando a notação anterior e tendo em mente que  $x' P(x, \delta) x = \pi_b' P \pi_b$  de (2.40), (2.41) e  $\pi_c' \Gamma_{c_k}(x, \delta) \pi_c = 0$ , pode-se reescrever a condição (2.79) como

$$\pi_c' (P_{c_k}(x, \delta) + \Gamma_{c_k}(x, \delta)) \pi_c > 0 \quad \forall \pi_c : C_k \pi_c = 0, \forall k \in \{1 \dots g\} . \quad (2.81)$$

Com o Lema de Finsler obtém-se a condição LMI a seguir para a inclusão desejada  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ .

$$Q_k' (P_{c_k}(x, \delta) + \Gamma_{c_k}(x, \delta)) Q_k > 0 \quad \forall x \in \vartheta(\mathcal{F}_k), \forall \delta \in \vartheta(\mathcal{D}), \forall k \in \{1 \dots g\}, \quad (2.82)$$

onde  $Q_k$  é a base ortonormal para o espaço nulo de  $C_k$ . Observe que, para qualquer  $k$  dado, os valores de  $x$  de interesse para a LMI (2.82) são aqueles pertencendo à  $k$ -ésima face do politopo. A notação  $\vartheta(\mathcal{F}_k)$  denota o conjunto dos vértices de  $\mathcal{X}$  na face  $\mathcal{F}_k$ . Para reduzir o número de variáveis de decisão no problema, ao custo de conservadorismo adicional, é possível restringir  $P_{c_k}(x, \delta)$  a ser a mesma para todas as faces. Mesmo que seja possível a restrição de  $\Gamma_{c_k}(x, \delta)$  ser a mesma para todas as faces, graus de liberdade importantes seriam perdidos. Veja a Observação 2.4.1 para mais detalhes.

Para aumentar a região de atração estimada  $\mathcal{E}$ , observe de (2.78) que o problema consiste em aproximar, o quanto for possível, a curva de nível unitária de  $v(x, \delta)$  às faces do politopo. Como  $v(x, \delta) > 1$  nas faces, o problema de interesse é minimizar a curva de nível de  $v(x, \delta)$  em cada face, *i.e.* minimizando  $\tau_k$  tal que  $v(x, \delta) < \tau_k, \forall x \in \mathcal{F}_k, \delta \in \mathcal{D}$  e para todo  $k \in \{1 \dots g\}$ . Procedendo como em (2.80)-(2.82), pode-se reescrever  $v(x, \delta) < \tau_k, \forall x \in \mathcal{F}_k, \delta \in \mathcal{D}$  como

$$Q_k' (\tilde{P}_{c_k}(x, \delta) + \tilde{\Gamma}_{c_k}(x, \delta)) Q_k > 0 \quad \forall x \in \vartheta(\mathcal{F}_k), \forall \delta \in \vartheta(\mathcal{D}), \forall k \in \{1 \dots g\}, \quad (2.83)$$

onde

$$\tilde{P}_{c_k}(x, \delta) = \begin{bmatrix} -P + \tilde{L}_{b_k} C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)' \tilde{L}_{b_k}' & \star \\ 0_{1 \times n+p} & \tau_k \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_{c_k}(x, \delta) = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{b_k} \mathfrak{K}_{\pi_b}(x, \delta) + \mathfrak{K}_{\pi_b}(x, \delta)' \tilde{M}'_{b_k} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & 0 \end{bmatrix} + \tilde{N}_{c_k} \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix}' \tilde{N}'_{c_k},$$

onde  $\tilde{M}_{b_k} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times s_b}$ ,  $\tilde{N}_{c_k} \in \mathbb{R}^{(n+p+1) \times n}$ ,  $\tilde{L}_{b_k} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ , para  $k \in \{1 \dots g\}$  são matrizes a serem determinadas como em (2.82).

De modo a minimizar a soma das ponderações de  $\tau_k$ , obtém-se o problema de otimização

$$\min_{\tau_k, P_{c_k}, \Gamma_{c_k}, \tilde{P}_{c_k}, \tilde{\Gamma}_{c_k}} \sum_{k=1}^g \tau_k w_k, \quad (2.84)$$

sujeito à (2.82), (2.48), (2.66), (2.83)

onde  $w_k$  são constantes de ponderação dadas expressando a prioridade no problema de minimização.

**Observação 2.5.1** Como a região de atração estimada  $\mathcal{E}$  está contida no politopo  $\mathcal{X}$ , a melhor região que o método pode estimar será o mais próximo possível de  $\mathcal{X}$ , ou pelo menos, próxima tanto quanto possível de alguma face desejada de  $\mathcal{X}$  que são especificadas pelo projetista através da escolha dos fatores de ponderação  $w_k$ . Observe que  $\tau_k$  é a máxima curva de nível de  $v(x, \delta)$  na face  $\mathcal{F}_k$  e então a estimativa será melhorada com respeito à face  $\mathcal{F}_j$  se a correspondente ponderação  $w_j$  é escolhida suficientemente maior quando comparada à outras ponderações  $w_k$ . Além do mais, se o valor de  $\tau_j$  obtido é próximo de um, para algum  $j \in \{1 \dots g\}$ , uma boa estimativa com respeito à face  $\mathcal{F}_j$  deve ser esperada. Esta informação pode ser usada para remodelar o politopo movendo a face  $\mathcal{F}_j$  um pouco mais distante da origem e recalculando a estimativa resolvendo (2.84) para o novo politopo  $\mathcal{X}$ . O ponto inicial é tipicamente um hipercubo pequeno definido como  $\mathcal{X} = \{x : \|x\|_\infty \leq \alpha\}$  onde  $\alpha$  é um fator escalar a ser ajustado de modo a obter uma solução factível.  $\square$

**Observação 2.5.2** No problema de otimização (2.84) novas variáveis de folga são introduzidas associadas às faces de  $\mathcal{X}$ . Para reduzir o número de variáveis de folga, uma maneira alternativa de minimizar as curvas de nível de  $v(x, \delta)$  consiste em minimizar a soma ponderada de  $v(x, \delta)$  para pontos  $x, \delta$  estrategicamente escolhidos dentro do politopo, tipicamente próximos às

faces. Neste caso, o problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min_{P_{c_k}, \Gamma_{c_k}} \quad & \sum_{k=1}^m \pi_b(\xi_k)' P \pi_{b_k}(\xi_k) w_k \\ \text{sujeito à} \quad & (2.82), (2.48), (2.66) \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde  $\{\xi_1 \dots \xi_m\}$  denota o conjunto particular de valores de  $(x, \delta)$  a ser considerado na otimização,  $\pi_b(\xi_k)$  são os valores de  $\pi_b(x, \delta)$  nestes pontos e  $w_k$  são os fatores de ponderação definindo a prioridade associada aos pontos. Observe que apenas os pontos são considerados e não a combinação convexa destes.  $\square$

### 2.5.2 Região de atração robusta

Uma característica interessante da estimativa em (2.78) é que esta é baseada em uma função de Lyapunov dependente de parâmetro. Isso permite parametrizar a estimativa da região de atração em termos de um conjunto de parâmetros. Entretanto, para sistemas incertos, os limites da estimativa (2.78) não podem ser calculados porque depende daqueles parâmetros incertos. Na sequência é tratado o problema de determinar uma estimativa da região de atração que não dependa destes parâmetros incertos.

A primeira abordagem para este problema consiste em usar uma função de Lyapunov que não dependa dos parâmetros incertos. Isso é feito introduzindo a restrição  $P = U' P_u U$ , para  $P$  em (2.40), onde  $P_u$  é agora a nova matriz a ser determinada,  $U$  é uma matriz dada escolhida de forma que  $\pi_u = U \pi_b$  é o vetor de funções não lineares obtidos de  $\pi_b = [x, \pi]_{col}$  removendo os elementos de  $\pi$  dependentes de  $\delta$ . O aspecto negativo desta abordagem é que as condições de estabilidade são independentes da taxa de variação dos parâmetros porque a função de Lyapunov não é mais dependente de parâmetro. Como resultado o método pode lidar com limites na magnitude do parâmetro  $\delta$ , mas o parâmetro pode variar arbitrariamente rápido como em problemas de estabilidade quadrática. Este método é potencialmente conservador (TROFINO; DE SOUZA, 1999).

Uma segunda abordagem consiste em usar a função de Lyapunov original dependente de parâmetros  $v(x, \delta)$  como em (2.40) para caracterizar a estabilidade e determinar a estimativa da região de atração de uma função auxiliar  $\omega(x)$ , não dependente de  $\delta$ , com  $\omega(x)$  tão próximo quanto possível de  $v(x, \delta)$ , e satisfazendo a condição  $\omega(x) \geq v(x, \delta)$ ,  $\forall (x, \delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{D} \times \dot{\mathcal{D}}$ .

Isso implica que a região

$$\mathcal{E}_\omega = \{x : \omega(x) \leq 1\} \quad (2.86)$$

satisfaz a inclusão  $\mathcal{E}_\omega \subseteq \mathcal{E} \forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D}$ . Portanto, do Teorema 2.2, tem-se que todas as trajetórias iniciando em  $\mathcal{E}_\omega$  são estáveis e não deixam o conjunto invariante  $\mathcal{E} \forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D}$ . Nesse sentido, ambas  $\mathcal{E}_\omega$  e  $\mathcal{E}$  são estimativas da região de atração.  $\mathcal{E}$  é menos conservador mas sua superfície depende do parâmetro incerto  $\delta$ . Por outro lado,  $\mathcal{E}_\omega$  é um subconjunto de  $\mathcal{E}$ , que não é invariante para as trajetórias do sistema, mas sua superfície não depende de  $\delta$ .

De modo a determinar a estimativa  $\mathcal{E}_\omega$ , considere a notação

$$\omega(x) := \pi'_b U' P_u U \pi_b \quad (2.87)$$

com as matrizes  $U$ ,  $P_u$  definidas como no início desta seção. O problema de interesse pode ser formulado como segue: encontrar as matrizes  $P$  de (2.40) e  $P_u$  de (2.87) tais que as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas para  $P$  e em adição  $\pi'_b (U' P_u U - P) \pi_b \geq 0$ . Esta última condição pode ser expressa pelas LMIs a seguir, seguindo o mesmo procedimento da Seção 2.4.

$$\begin{aligned} U' P_u U - P - L_b C_b(x, \delta) - C_b(x, \delta)' L'_b - \Gamma_b(x, \delta) &\geq 0 \\ \forall x \in \mathfrak{V}(\mathcal{X}), \forall \delta \in \mathfrak{V}(\mathcal{D}), \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde  $P$ ,  $L_b$ ,  $\Gamma_b(x, \delta)$  são matrizes a ser determinadas como em (2.48) juntamente com  $P_u$ .

De maneira similar à (2.84), o tamanho da estimativa  $\mathcal{E}_\omega$  é aumentado resolvendo

$$\begin{aligned} \min_{\tau_k, P_{c_k}, \Gamma_{c_k}, \tilde{P}_{c_k}, \tilde{\Gamma}_{c_k}} \quad & \sum_{k=1}^g \tau_k w_k \\ \text{sujeito à } & (2.82), (2.48), (2.66), (2.83), (2.88) \end{aligned}, \quad (2.89)$$

onde  $\tilde{P}_{c_k}(x, \delta)$  em (2.83) é substituído por

$$\tilde{P}_{c_k}(x, \delta) = \begin{bmatrix} -U' P_u U + \tilde{L}_{b_k} C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)' \tilde{L}'_{b_k} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & \tau_k \end{bmatrix}.$$

### 2.5.3 Conjunto não convexo $\mathcal{X}$ de estados iniciais

Considere agora que a região  $\mathcal{X}$  de estados iniciais é definida como a união de politopos  $\mathcal{X}_i$  dados.

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{X}_i, \quad (2.90)$$

onde  $r$  é o número de politopos. Observe que, em geral,  $\mathcal{X}$  não é convexo, como ilustrado na Figura 4. Nesta figura, os politopos são  $\mathcal{X}_1 = \text{Co}\{v_{1j}, j \in \{1 \dots 4\}\}$  e  $\mathcal{X}_2 = \text{Co}\{v_{2j}, j \in \{1 \dots 4\}\}$ . O estado do sistema é  $x = [x_1 \ x_2]'$  e observe que  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \subseteq \text{Co}\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$ .

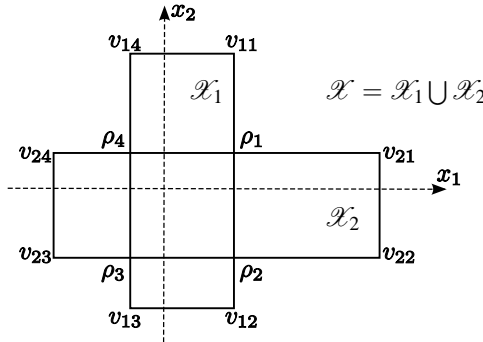


Figura 4: Representação da união não convexa de dois politopos convexos e seus vértices.

Suponha que cada região  $\mathcal{X}_i$  é descrita como um envoltório convexo de seus vértices ou, equivalentemente, como a interseção de semi-espacos como se segue.

$$\mathcal{X}_i = \text{Co}\{v_{ij}, j \in \{1 \dots h_i\}\}, i \in \{1 \dots r\} \quad (2.91)$$

$$= \{x: a'_{ik}x \leq 1, \forall k \in \{1 \dots g_i\}\}, i \in \{1 \dots r\}, \quad (2.92)$$

onde  $h_i, g_i$  são o número de vértices e de faces do politopo  $\mathcal{X}_i$ ,  $v_{ij} \in \mathbb{R}^n$  são os vértices,  $a_{ik} \in \mathbb{R}^n$  são os vetores definindo as faces  $\mathcal{F}_{ik}$  do politopo  $\mathcal{X}_i$ . As

faces são dadas por

$$\mathcal{F}_{ik} = \{x \in \mathcal{X}_i : a'_{ik}x = 1\}, \quad k \in \{1 \dots g_i\}, \quad i \in \{1 \dots r\}. \quad (2.93)$$

Procedendo como na Seção 2.4 e levando em conta a região (2.90), segue que  $v(x, \delta)$  é estritamente positiva em  $\mathcal{X}_i$  se

$$\begin{aligned} P + L_{b_i}C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)'L'_{b_i} + \Gamma_{b_i}(x, \delta) &> 0 \\ \forall (x, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_i \times \mathcal{D}), \quad i \in \{1 \dots r\}, \\ \Gamma_{b_i}(x, \delta) &:= M_{b_i} \mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta) + \mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta)'M'_{b_i}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde  $M_{b_i} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times s_b}$  e  $L_{b_i} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$  são matrizes de escalonamento a serem determinadas juntamente com  $P$  e  $\mathfrak{N}_{\pi_b}(x, \delta)$  é o anulador em (2.47). Além disso,  $\dot{v}(x, \delta)$  é estritamente negativa em  $\mathcal{X}_i$ , e zero na origem, se a seguinte LMI é satisfeita:

$$\begin{aligned} P_a + P'_a + C_a(x, \delta, \check{\delta})'L'_{a_i} + L_{a_i}C_a(x, \delta, \check{\delta}) + \Gamma_{a_i}(x, \delta) &< 0 \\ \forall (x, \delta, \check{\delta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_i \times \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}), \quad i \in \{1 \dots r\}, \\ \Gamma_{a_i}(x, \delta) &:= M_{a_i} \mathfrak{N}_{\pi_a}(x, \delta) + \mathfrak{N}_{\pi_a}(x, \delta)'M'_{a_i}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde  $M_{a_i}$  tem as mesmas dimensões de  $\mathfrak{N}_{\pi_a}(x, \delta)'$  em (2.64),  $P_a$ ,  $C_a(x, \delta, \check{\delta})$  são as mesmas de (2.66) e  $M_{a_i}$ ,  $L_{a_i}$  são matrizes de escalonamento a serem determinadas juntamente com  $P$ .

**Observação 2.5.3** *É importante notar que cada região  $\mathcal{X}_i$  está associada com diferentes escalonamentos  $L_{a_i}$ ,  $L_{b_i}$ ,  $M_{a_i}$ ,  $M_{b_i}$  a serem determinados. Se os mesmos escalonamentos são usados para todas as faces, as propriedades de convexidade das LMIs permitem concluir que as condições são satisfeitas para um conjunto de condições iniciais maior correspondendo à  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathbf{Co}\{\mathcal{X}_i, i \in \{1 \dots q\}\}$ . Observe que  $\mathcal{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$  e, portanto, é obtido um resultado mais conservador. Ao custo de algum conservadorismo, é possível reduzir o número de variáveis de decisão mantendo  $L_{a_i}$ ,  $L_{b_i}$  os mesmos  $\forall i$ , mas  $M_{a_i}$ ,  $M_{b_i}$  devem ser diferentes para evitar resultados excessivamente conservadores. Veja a Observação 2.4.1 para mais detalhes.  $\square$*

O problema que resta a ser resolvido é determinar o maior  $\mathcal{E}$  possível em (2.78) que se encontra dentro da região  $\mathcal{X}$  em (2.90). Como  $\mathcal{X}$  é fechado e contém a origem, a condição de inclusão é satisfeita se (e somente se) a curva de nível de  $v(x, \delta)$  é maior que a unidade em qualquer ponto da superfície de  $\mathcal{X}$ .

Tendo em mente que  $\mathcal{X}$  é a união de politopos, a superfície de  $\mathcal{X}$  é também a união das regiões que são partes das faces  $\mathcal{F}_{ik}$ . Vamos particionar estas partes de faces em células politópicas e denotar por  $\{\mathcal{G}_{ikj}, j \in \{1 \dots s_{ik}\}\}$  o conjunto de todas as células politópicas de  $\mathcal{F}_{ik}$  na superfície de  $\mathcal{X}$ . Então pode-se representar a superfície de  $\mathcal{X}$ , denotada por  $\partial \mathcal{X}$ , como

$$\partial \mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=1}^{g_i} \bigcup_{j=1}^{s_{ik}} \mathcal{G}_{ikj}. \quad (2.96)$$

Para ilustrar as ideias, considere a Figura 4 e defina como face 1 de  $\mathcal{X}_1$  a face associada aos vértices  $v_{11}, v_{12}$ , *i.e.*  $\mathcal{F}_{11} = \mathbf{Co}\{v_{11}, v_{12}\}$ . As regiões politópicas  $\mathcal{G}_{111} = \mathbf{Co}\{v_{11}, \rho_1\}$  e  $\mathcal{G}_{112} = \mathbf{Co}\{\rho_2, v_{12}\}$  são partes de  $\mathcal{F}_{11}$  que pertencem à superfície de  $\mathcal{X}$ .

Procedendo como em (2.82) segue que  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$  se a seguinte condição é satisfeita.

$$\begin{aligned} & Q'_{ik}(P_{c_{ikj}}(x, \delta) + \Gamma_{c_{ikj}}(x, \delta))Q_{ik} > 0 \\ & \forall (x, \delta) \in \mathfrak{v}(\mathcal{G}_{ikj} \times \mathcal{D}), \forall i \in \{1 \dots r\}, \forall k \in \{1 \dots g_i\}, \forall j \in \{1 \dots s_{ik}\}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde  $Q_{ik}$  é a base ortonormal para o espaço nulo de  $C_{ik}$  e

$$\begin{aligned} \pi_c &= \begin{bmatrix} \pi_b \\ 1 \end{bmatrix}, C_{ik} = \begin{bmatrix} a'_{ik}C_0 & -1 \end{bmatrix}, C_0 = [I_n \ 0_{n \times p}] \\ P_{c_{ikj}}(x, \delta) &= \begin{bmatrix} P + L_{b_{ikj}}C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)'L'_{b_{ikj}} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{c_{ikj}}(x, \delta) &= \begin{bmatrix} M_{b_{ikj}}\mathfrak{K}\pi_b(x, \delta) + \mathfrak{K}\pi_b(x, \delta)'M'_{b_{ikj}} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & 0 \end{bmatrix} + \\ & N_{c_{ikj}} \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix}' N'_{c_{ikj}}, \end{aligned}$$

onde  $M_{b_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times s_b}$ ,  $N_{c_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p+1) \times n}$ ,  $L_{b_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ , para  $i \in \{1 \dots r\}$ ,  $k \in \{1 \dots g_i\}$ ,  $j \in \{1 \dots s_{ik}\}$ , são matrizes a ser determinadas juntamente com  $P$ .

Procedendo como em (2.80)-(2.82) pode-se reescrever  $v(x, \delta) <$



$\tau_{ikj}, \forall (x, \delta) \in \mathcal{G}_{ikj} \times \mathcal{D}$  como

$$\begin{aligned} Q'_{ik}(\tilde{P}_{c_{ikj}}(x, \delta) + \tilde{\Gamma}_{c_{ikj}}(x, \delta))Q_{ik} &> 0 \\ \forall (x, \delta) \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_{ikj} \times \mathcal{D}) \quad \forall i \in \{1 \dots r\}, \forall k \in \{1 \dots g_i\}, \forall j \in \{1 \dots s_{ik}\} \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde

$$\tilde{P}_{c_{ikj}}(x, \delta) = \begin{bmatrix} -P + \tilde{L}_{b_{ikj}}C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)'\tilde{L}'_{b_{ikj}} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & \tau_{ikj} \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{c_{ikj}}(x, \delta) = & \begin{bmatrix} \tilde{M}_{b_{ikj}}\pi_b(x, \delta) + \pi_b(x, \delta)'\tilde{M}'_{b_{ikj}} & \star \\ 0_{1 \times n+p} & 0 \end{bmatrix} + \\ & \tilde{N}_{c_{ikj}} \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & -x \end{bmatrix}'\tilde{N}'_{c_{ikj}}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{M}_{b_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times s_b}$ ,  $\tilde{N}_{c_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p+1) \times n}$ ,  $\tilde{L}_{b_{ikj}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$  são matrizes a ser determinadas como em (2.82).

Como efetuado anteriormente, para aumentar o tamanho da região de atração estimada  $\mathcal{E}$ , foi determinada a função de Lyapunov resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\tau_{ikj}, P_{c_{ikj}}, \Gamma_{c_{ikj}}, \tilde{P}_{c_{ikj}}, \tilde{\Gamma}_{c_{ikj}}} \quad & \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{g_i} \sum_{j=1}^{s_{ik}} \tau_{ikj} w_{ikj} \\ \text{sujeito à} \quad & (2.99), (2.97), (2.95), (2.94) \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde  $w_{ikj}$  são fatores de ponderação dados definindo a prioridade no problema de otimização.

## 2.6 Condições para estabilidade global

Esta seção é dedicada ao estudo de problemas de estabilidade global, *i.e.* o conjunto de condições iniciais  $\mathcal{X}$  é todo o espaço de estados. A ideia é encontrar condições adicionais sob as quais os resultados da Seção 2.4, desenvolvidos para estabilidade local, possam ser estendidos para estabilidade global.

Acontece a partir do Teorema 2.2 que a estabilidade global do sistema (2.39) é garantida se as LMIs (2.48), (2.66) são satisfeitas para  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ . Assim, o problema de interesse é encontrar sob quais condições adicionais estas LMIs dependentes do estado podem ser satisfeitas  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Vamos começar com o resultado a seguir.

**Lema 2.3** *Considere o problema LMI  $\Psi(W, z) > 0$  onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor de parâmetros e  $W$  a variável de decisão a ser ajustada. Suponha que  $\Psi(W, z)$  é uma função matricial afim do vetor  $z$ , i.e.  $\Psi(W, z)$  pode ser decomposta como*

$$\Psi(W, z) = \Psi_0(W) + \sum_{i=1}^{n_z} \Psi_i(W) z_i, \quad (2.102)$$

onde  $z_i$  são as componentes de  $z$  e  $\Psi_i(W)$  são funções afim de  $W$ .

Então  $\Psi(W, z) > 0$  é satisfeita para algum  $W$  e  $\forall z \in \mathbb{R}^{n_z}$  se e apenas se  $\Psi_0(W) > 0$  e  $\Psi_i(W) = 0$ ,  $\forall i \in \{1 \dots n_z\}$ .

**Prova:** A suficiência é de fácil verificação e a necessidade segue por contradição. Suponha que  $\Psi(W, z) > 0$  é satisfeito  $\forall z \in \mathbb{R}^{n_z}$  e  $\Psi_i(W) \neq 0$  para algum  $i \in \{1 \dots n_z\}$ . Como  $z_i$ ,  $i \in \{1 \dots n_z\}$  são parâmetros independentes, considere a situação onde  $z_j = 0$ ,  $\forall j \neq i$  e  $z_i \in \{-\infty, \infty\}$ . Então, se  $\Psi(W, z) = \Psi_0(W) + z_i \Psi_i(W) > 0$  é satisfeito para  $z_i \rightarrow \infty$ , concluímos que esta condição não pode ser satisfeita para  $z_i \rightarrow -\infty$ . Isso mostra que  $\Psi_i(W) = 0$ ,  $\forall i \in \{1 \dots n_z\}$  são condições necessárias. Além do mais,  $\Psi_0(W) > 0$  também é necessário para obter  $\Psi(W, z) > 0$  satisfeita quando  $z = 0$ , o que completa a prova.  $\square$

Tendo em vista o Lema 2.3 pode-se diretamente derivar condições para estabilidade global. Como exemplo, considere a LMI (2.33) e a notação

$$\Psi(W, x) := A(x)'P + PA(x) + L\mathfrak{K}_x(x) + \mathfrak{K}_x(x)'L' \quad W := [P, L]_{diag}. \quad (2.103)$$

A decomposição afim (2.102), para a função particular (2.103), pode ser diretamente obtida avaliando  $\Psi(W, x)$  em valores particulares de  $x$  como se segue

$$\begin{aligned} \Psi_0(W) &= \Psi(W, x), \text{ para } x = 0 \text{ e} \\ \Psi_i(W) &= \Psi(W, x) - \Psi_0(W), \text{ para } x = \text{col}_i(I_n) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Foi mostrado na Seção 2.2.4 que o sistema  $\dot{x} = A(x)x$  em (2.28) é globalmente quadraticamente estável se a LMI dependente do estado (2.33) é satisfeita para algumas matrizes  $P > 0$ ,  $L$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ . Do Lema 2.3 e da notação (2.103), (2.104) o problema a ser resolvido é encontrar  $W = [P, L]_{diag}$  tal que  $\Psi_0(W) < 0$  e  $\Psi_i(W) = 0$ ,  $i \in \{1 \dots 3\}$ . Este é um problema LMI convexo que pode ser facilmente resolvido. Em particular, é possível verificar que com o  $\mathfrak{K}_x(x)$  dado em (2.34,d) e as matrizes  $P$ ,  $L$  de (2.35) a condição de

igualdade  $\Psi_i(W) = 0$ ,  $i \in \{1 \dots 3\}$  e  $\Psi_0(W) = -2I_3$  são satisfeitas e então o sistema é globalmente quadraticamente estável.

De modo a generalizar as condições de estabilidade local do Teorema 2.2 para estabilidade global, pode-se representar as variáveis de decisão das LMIs (2.48), (2.66) através da notação  $W := [P, M_a, L_a, M_b, L_b]_{diag}$  e considerar a decomposição afim das LMIs (2.48), (2.66) em termos do estado  $x$  como segue.

$$\begin{aligned} \Psi(W, x, \delta) &:= P + L_b C_b(x, \delta) + C_b(x, \delta)' L_b' + \Gamma_b(x, \delta) = \\ &\Psi_0(W, \delta) + \sum_{i=1}^n \Psi_i(W) x_i, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \Phi(W, x, \delta, \dot{\delta}) &= P_a' + P_a + L_a C_a(x, \delta, \dot{\delta}) + C_a(x, \delta, \dot{\delta})' L_a' + \Gamma_a(x, \delta) = \\ &\Phi_0(W, \delta, \dot{\delta}) + \sum_{i=1}^n \Phi_i(W) x_i. \end{aligned} \quad (2.106)$$

As matrizes  $\Psi_i(\cdot)$ ,  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $i \in \{1 \dots n\}$  são obtidas como em (2.104).

**Corolário 2.2** *Considere o sistema (2.39) com as Suposições 2.1, 2.2, sejam  $\mathcal{D}$ ,  $\check{\mathcal{D}}$  dados e  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ . Considere a decomposição afim (2.106), (2.105) onde  $W := [P, M_a, L_a, M_b, L_b]_{diag}$  e as matrizes  $\Psi_i(\cdot)$ ,  $\Phi_i(\cdot)$  são obtidas como em (2.104). Suponha que exista um  $W$  que seja solução do seguinte problema LMI convexo*

$$\begin{aligned} \Psi_0(W, \delta) &> 0, \quad \Phi_0(W, \delta, \dot{\delta}) < 0, \quad \forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}) \\ \Psi_i(W) &= 0, \quad \Phi_i(W) = 0, \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Então a origem do sistema (2.39) é globalmente assintoticamente estável e  $v(x, \delta) = x' \mathbf{P}(x, \delta) x$  com a estrutura (2.41) demonstra a estabilidade assintótica  $\forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Prova.** Primeiramente, observe que as condições (2.107) implicam que  $\Psi(W, x, \delta) > 0$  de (2.105) e  $\Phi(W, x, \delta, \dot{\delta}) < 0$  de (2.106) são satisfeitas  $\forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D} \times \check{\mathcal{D}}$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Além do mais, ambas  $\Psi(W, x, \delta)$  e  $\Phi(W, x, \delta, \dot{\delta})$  são independentes de  $x$ , i.e.  $\Psi(W, x, \delta) = \Psi_0(W, \delta)$  e  $\Phi(W, x, \delta, \dot{\delta}) = \Phi_0(W, \delta, \dot{\delta})$ . Isto implica que as constantes positivas

$\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_1$  de (2.71), (2.67) são limitadas e dadas por

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= \min_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}, \dot{\delta} \in \tilde{\mathcal{D}}} \underline{\lambda}(-\Phi(W, x, \delta, \dot{\delta})) = \min_{\delta \in \mathcal{D}, \dot{\delta} \in \tilde{\mathcal{D}}} \underline{\lambda}(-\Phi_0(W, \delta, \dot{\delta})) \\ \varepsilon_1 &= \max_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}(\Psi(W, x, \delta)) = \max_{\delta \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}(\Psi_0(W, \delta)) \\ \varepsilon_3 &= \min_{x \in \mathcal{X}, \delta \in \mathcal{D}} \underline{\lambda}(\Psi(W, x, \delta)) = \min_{\delta \in \mathcal{D}} \underline{\lambda}(\Psi_0(W, \delta)).\end{aligned}$$

Entretanto, não é possível mostrar, em geral, a limitação de  $\varepsilon_2$  de (2.67) quando  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ . Neste caso as condições (2.38) são satisfeitas com

$$\phi_3 = \varepsilon_3 \|x\|^2, \quad \phi_1 = \varepsilon_1 (\varepsilon_2(x) + 1) \|x\|^2, \quad \phi_2 = \varepsilon_4 \|x\|^2, \quad (2.108)$$

$$\varepsilon_2(x) = \max_{\delta \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}(M'M), \quad M := F(x, \delta)^{-1} G(x, \delta).$$

Observe que  $\varepsilon_2(x)$  é positivo definido e limitado para  $\|x\|$  limitado. A estabilidade assintótica global segue do Teorema 2.2 e (KHALIL, 1996).

□

**Observação 2.6.1** *O Lema 2.3 também pode ser usado para resolver problemas de estabilidade onde os parâmetros incertos possuem taxas de variação arbitrárias, i.e.  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^d$ . Neste caso é suficiente considerar a decomposição afim de  $\Phi(W, x, \delta, \dot{\delta})$  em termos de  $\dot{\delta}_i$  e aplicar o Lema 2.3. Esta situação levará a uma função de Lyapunov que não é dependente de parâmetros como discutido na Seção 2.5.2.* □

Seguindo a linha do último resultado obtém-se uma nova condição de estabilidade, indicada abaixo.

**Corolário 2.3** *Considere o sistema (2.39) sob as Suposições 2.1, 2.2, com*

$$\mathcal{X} := \left\{ \begin{array}{l} x = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^\top \text{ tal que} \\ x_i \text{ irrestrito para } i \in \mathcal{I}_{\text{irr}} \\ x_i \geq 0 \text{ para } i \in \mathcal{I}_{\text{pos}} \\ x_i \leq 0 \text{ para } i \in \mathcal{I}_{\text{neg}} \\ \mathcal{I}_{\text{irr}} + \mathcal{I}_{\text{pos}} + \mathcal{I}_{\text{neg}} = \{1 \dots n\} \end{array} \right\}, \quad (2.109)$$

e sejam  $\mathcal{D}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}$  politopos dados. Considere as matrizes  $\Psi_i(\cdot)$ ,  $\Phi_i(\cdot)$  dadas pela decomposição afim em (2.106), (2.105). Suponha que o problema LMI a

seguir é factível para algum  $W := [P, M_a, L_a, M_b, L_b]_{diag}$ .

$$\begin{aligned} \Psi_0(W, \delta) &> 0, \quad \Phi_0(W, \delta, \dot{\delta}) < 0, \quad \forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathfrak{V}(\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \Psi_i(W) &= 0, \quad \Phi_i(W) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{irr} \\ \Psi_i(W) &\geq 0, \quad \Phi_i(W) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{pos} \\ \Psi_i(W) &\leq 0, \quad \Phi_i(W) \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{neg} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Então a origem do sistema (2.39) é assintoticamente estável e a função  $v(x, \delta) = x'P(x, \delta)x$  com a estrutura (2.41), satisfaz as condições de estabilidade (2.38)  $\forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$  e  $\forall x \in \mathcal{X}$  em (2.109).  $\square$

As condições do Lema 2.3 são úteis em problemas de estabilidade global. O próximo resultado apresenta uma versão modificada deste lema tal que problemas LMI dependentes de parâmetro possam ser resolvidos sem usar a abordagem politópica. Sabe-se que o número de LMIs cresce exponencialmente com o número de parâmetros na abordagem politópica.

**Corolário 2.4** *Considere o problema LMI politópico  $\Psi(W, z) > 0$  onde  $\Psi(W, z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma função matricial afim de  $z$  tendo a estrutura (2.102),  $m$  é a dimensão da LMI e  $W$  o conjunto de variáveis de decisão a serem determinadas. Suponha que as componentes de  $z$  são limitadas como*

$$\mathcal{Z} := \{z = [z_i]_{col}^{n_z} : \bar{z}_i \geq z_i \geq \underline{z}_i, \forall i \in \{1 \dots n_z\}\}, \quad (2.111)$$

onde  $\bar{z}_i, \underline{z}_i$  são constantes dadas expressando os limites superior e inferior de  $z_i$ .

Então,  $\Psi(W, z) > 0$  está satisfeita para algum  $W$  e qualquer  $z_i$  no conjunto (2.111) se existe  $W$  e matrizes  $S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $i \in \{1 \dots n_z\}$  tais que o seguinte conjunto de  $2n_z + 1$  LMIs estão satisfeitas.

$$\begin{aligned} \Psi_0(W) + \sum_{i=1}^{n_z} (\Psi_i(W) + S_i) \underline{z}_i - S_i \bar{z}_i &> 0, \\ \Psi_i(W) + S_i &> 0, \quad S_i > 0, \quad \forall i \in \{1 \dots n_z\}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

**Prova.** Para quaisquer matrizes positivas semi-definidas simétricas  $R_i, S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tem-se que

$$R_i(z_i - \underline{z}_i) \geq 0, \quad S_i(\bar{z}_i - z_i) \geq 0, \quad \forall i \in \{1 \dots n_z\}. \quad (2.113)$$

Aplicando o Procedimento – S à condição  $\Psi(W, z) > 0$ , com a estrutura (2.102), sujeita às restrições (2.113) concluímos que  $\Psi(W, z) > 0$  será satisfeita para algum  $W$  e para os limites (2.111) se  $\Omega(Y, z) > 0$ , indicada abaixo,

é satisfeita para algum  $Y := [W, [R_i]_{diag}^n, [S_i]_{diag}^n]_{diag}$  e  $\forall z_i \in \mathbb{R}$  ( $z_i$  irrestrito).

$$\Omega(Y, z) := \Psi_0(W) + \sum_{i=1}^{n_z} \Psi_i(W) z_i - R > 0 \quad R = \sum_{i=1}^{n_z} R_i(z_i - \underline{z}_i) + S_i(\bar{z}_i - z_i). \quad (2.114)$$

As  $2n$  matrizes de escalonamento  $R_i, S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são graus de liberdade adicionais, introduzidas pelo *Procedimento* –  $S$ , a serem determinadas de modo a reduzir o conservadorismo que aparece no problema quando  $z_i$  pode ser irrestrito na LMI (2.114). Reescrevendo as expressões dadas em (2.114) em uma notação mais conveniente tem-se:

$$\Omega(Y, z) := \Omega_0(Y) + \sum_{i=1}^{n_z} \Omega_i(Y) z_i > 0 \quad Y := [W, [R_i]_{diag}^n, [S_i]_{diag}^n]_{diag}, \quad (2.115)$$

onde

$$\Omega_0(Y) := \Psi_0(W) + \sum_{i=1}^{n_z} R_i \underline{z}_i - S_i \bar{z}_i \quad \Omega_i(Y) := \Psi_i(W) - R_i + S_i.$$

Com o auxílio do Corolário 2.2, segue que o problema LMI (2.115) para  $z_i$  irrestritas tem solução se e apenas se existe  $Y$  tal que

$$\Omega_0(Y) := \Psi_0(W) + \sum_{i=1}^{n_z} R_i \underline{z}_i - S_i \bar{z}_i > 0, \quad (2.116)$$

$$\Omega_i(Y) := \Psi_i(W) - R_i + S_i = 0. \quad (2.117)$$

Tendo em mente que qualquer matriz simétrica pode ser decomposta como a diferença de duas matrizes positivas definidas, a restrição (2.117) pode sempre ser satisfeita e é possível eliminar as matrizes  $R_i$  das expressões introduzindo as restrições  $\Psi_i(W) + S_i > 0$  com  $S_i > 0$ . Neste caso a matriz  $R_i$  é definida como  $R_i = \Psi_i(W) + S_i$ . Sob estas restrições as condições (2.116), (2.117) são equivalentes à (2.112), completando a prova.  $\square$

O interesse no Corolário 2.4 é que este pode ser usado para evitar crescimento exponencial do número de LMIs que ocorre quando é aplicada a abordagem politópica para resolver LMIs do tipo  $\Psi(W, z) > 0$ . Observe que o número de LMIs em (2.112) é igual à  $2n_z + 1$  enquanto na abordagem politópica é  $2^{n_z}$ . Por outro lado, a condição (2.112) tem mais variáveis de decisão para ajustar, *i.e.* as matrizes  $S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\forall i \in \{1 \dots n_z\}$ . Exemplos

numéricos mostram que o grau de conservadorismo da condição (2.112) é tipicamente pequeno se comparado à abordagem politópica. Por exemplo, se usarmos o Corolário 2.4 para recalcular os limites de  $\gamma$  correspondente ao problema LMI em (2.34), obtém-se praticamente os mesmos valores de  $\gamma$  previamente obtidos com a abordagem politópica. Os novos limites são 0.8376 ; 0.9899 ; 0.7032 ;  $1.9898 \times 10^9$  correspondendo à valores de  $\gamma$  nos casos (a), (b), (c), (d). Finalmente, observe que o Corolário 2.4 pode ser usado para resolver as LMIs nas seções precedentes onde o problema de estabilidade local é estudado.

## 2.7 Exemplos

Esta seção tem como objetivo ilustrar os resultados apresentados neste capítulo através de exemplos numéricos<sup>9</sup>.

**Exemplo 2.2** *Considere o problema de estimar a região de atração do sistema a seguir, emprestado de (KHALIL, 1996).*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

*A origem é um ponto de equilíbrio estável e o sistema tem um ciclo limite que é a fronteira da verdadeira<sup>10</sup> região de atração deste ponto de equilíbrio. O ciclo limite para  $\varepsilon = 1$  é a curva mais externa (tracejada) indicada na Figura 5.*

*Como o sistema possui grau 3, será considerado o conjunto de funções não lineares com todos os elementos possíveis de até grau 3, dado abaixo*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}', \pi = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix}', \quad (2.119)$$

*e com isso, pode-se representar o sistema (2.118) como em (2.39) com as*

<sup>9</sup>Todos os resultados numéricos e figuras foram obtidos utilizando os pacotes computacionais SeDuMi ou SDPT3 para solução das LMIs e o parser YALMIP (LÖFBERG, 2008).

<sup>10</sup>Todas as verdadeiras regiões de atração apresentadas nesta dissertação foram obtidas realizando integrações em tempo direto e/ou reverso para pontos críticos dos sistemas, como em (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985).

seguintes matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.120)$$

$$G(x, \delta) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \\ 0 & -x_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F(x, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.121)$$

Observe que  $F$  é inversível  $\forall x$ . Estamos procurando por uma função de Lyapunov do tipo (2.41) onde  $G(x)$ ,  $F(x)$  são os indicados anteriormente. Inicialmente são testadas as condições com respeito à uma vizinhança da origem definida pelo politopo<sup>11</sup>  $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $\alpha$  é um escalar a ser determinado. Para  $\alpha = 0$  as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas. Este resultado confirma que a origem é localmente exponencialmente estável. Para estimar a região de atração da origem através de (2.84), primeiramente considere a condição usual de estabilidade quadrática, considerando  $\mathbf{x}_x(x) = 0$ , e a função de Lyapunov em (2.41) é uma forma quadrática usual, i.e.  $P$  tem a estrutura dada em (2.42) onde  $P_0$  é uma matriz a ser determinada.

Aumentando  $\alpha$  a partir de zero, obtém-se a estimativa  $\mathcal{E}_0$  apresentada na Figura 5 pela curva mais interna e correspondendo a  $\alpha = 1.9$ .

Uma estimativa melhor pode ser obtida usando o anulador

$$\mathbf{x}_{\pi_b} = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

<sup>11</sup>A rotina *convhulln* do Matlab foi usada para organizar as faces dos politopos.



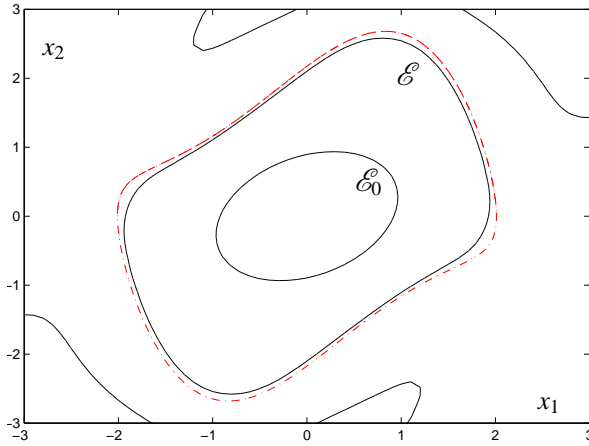


Figura 5: Regiões de atração estimadas para o sistema (2.118) com  $\varepsilon=1$ .

e uma função de Lyapunov mais complexa onde  $P = P'$  é uma matriz livre a ser determinada. Nesta situação obtém-se  $\alpha = 3.1$ . A fronteira da estimativa toca o politopo e esta informação é usada para redefinir seus vértices. A estimativa indicada por  $\mathcal{E}$  na Figura 5 foi obtida com o politopo

$$\mathcal{X} = \text{Co} \left\{ \begin{array}{cccc} 2.1 & 1.3 & -2.1 & -1.3 \\ -0.21 & 3.3 & 0.21 & -3.3 \end{array} \right\}.$$

O sistema considerado neste exemplo já foi amplamente estudado na literatura. A estimativa  $\mathcal{E}_0$  mostrada na Figura 5 é muito próxima para a obtida em (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996) maximizando a soma dos quadrados dos semi-eixos do elipsoide. A estimativa  $\mathcal{E}$  é consideravelmente melhor que a encontrada em (DAVISON; KURAK, 1971) maximizando o volume do elipsoide. Em ambas as referências são usadas funções de Lyapunov quadráticas. A estimativa encontrada em (TROFINO, 2000) com uma função de Lyapunov similar e um politopo de 8 vértices é menor que  $\mathcal{E}$ . A estimativa obtida em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008) com uma função de Lyapunov mais complexa é muito parecida com  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Exemplo 2.3** Considere agora o problema de estimar a região de atração do

sistema incerto a seguir, retirado de (CHESI, 2004).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\delta x_1 - x_2 + \delta x_1^3 \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Neste caso,  $\delta$  é um parâmetro incerto invariante no tempo cujos valores admissíveis são representados por  $\mathcal{D} = \{\delta : \delta \in [1, 3]\}$ . O sistema (2.123) pode ser representado como em (2.39) com  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $G(x, \delta)$  e  $F(x, \delta)$  respectivamente indicados a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \\ 0 & -x_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\delta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}'$$

$$\pi = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & \delta x_1 & \delta x_1^2 & \delta x_1^3 \end{bmatrix}'$$

O anulador  $\mathfrak{K}_{\pi_b}(x)$  considerado neste caso é definido em (2.122). Serão consideradas 3 situações na estimação da região de atração. O primeiro caso é quando tanto a função de Lyapunov quanto a região de atração são dependentes do parâmetro incerto. O segundo caso é quando ambas, a função de Lyapunov e a região de atração, não dependem do parâmetro incerto. A terceira situação é quando a função de Lyapunov depende, mas a região de atração não depende do parâmetro incerto. No primeiro e no terceiro caso, as condições levam em conta a suposição de que  $\delta$  é invariante no tempo. No segundo caso as condições permitem que  $\delta$  seja arbitrariamente variante no tempo.

Para o segundo e terceiro casos, deve-se escolher  $U$  como

$$U = \begin{bmatrix} I_{(n+p-3) \times (n+p-3)} & 0_{(n+p-3) \times 3} \end{bmatrix},$$

e ajustar  $P_u$  com as dimensões apropriadas. O polítopo usado é do tipo

$$\mathcal{X} = \mathbf{Co} \left\{ \begin{array}{cccc} -1.8 & 0.1 & 1.8 & -0.1 \\ 1.8 & 1.8 & -1.8 & -1.8 \end{array} \right\}.$$

Os resultados são indicados na Figura 6. As curvas tracejadas representam a fronteira da região de atração verdadeira para alguns valores de  $\delta \in [1, 3]$  e as curvas sólidas são as estimativas para cada um destes valores de  $\delta$  obtidas para o primeiro caso, exceto pelas curvas mais interiores,  $\mathcal{E}_v$  e  $\mathcal{E}_\omega$ , que são as regiões de atração obtidas para o segundo e terceiro caso, respectivamente. Neste caso,  $\mathcal{E}_\omega$  é uma estimativa robusta da região de atração.

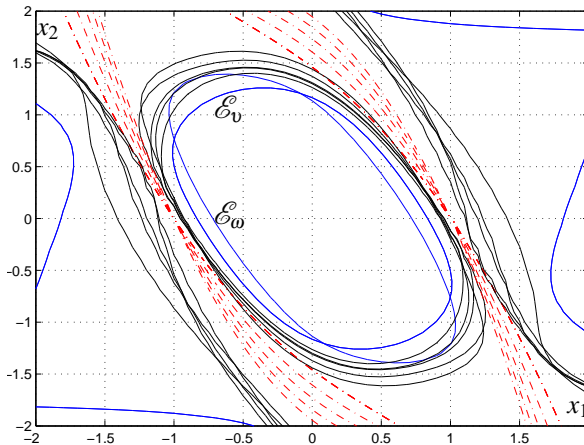


Figura 6: Regiões de atração estimadas para o sistema (2.123).

Em comparação aos resultados mostrados em (CHESI, 2004), aqui foram encontradas regiões de atração dependentes de parâmetros maiores que seu caso (a) e também uma maior região de atração robusta que no seu caso (b). Os resultados poderiam ser aperfeiçoados considerando um vetor  $\pi$  com mais elementos não lineares incertos ou aumentando o número de vértices do polítopo.  $\square$

**Exemplo 2.4** Considere o sistema racional

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \zeta(x) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1 + \varepsilon_2 x_1^2, \quad \zeta(x) = \frac{\varepsilon_1 x_1}{x_2^2 + 1}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

onde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  são parâmetros do sistema. O sistema linearizado tem a matriz Jacobiana dada por

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

e, então, segue que o sistema é localmente exponencialmente estável desde que  $\varepsilon_1 < 1$ . Definindo a função não linear

$$\pi(x) := \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & \zeta & \zeta x_1 & \zeta x_2 & \zeta x_1^2 & \zeta x_1 x_2 & \zeta x_2^2 \end{bmatrix}' \quad (2.126)$$

e observando as seguintes relações entre as componentes  $\pi_i$  de  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= x_1^2 & \pi_3 &= x_2^2 & \pi_5 &= x_1 \pi_4 & \pi_7 &= x_1 \pi_5 & \pi_9 &= x_2 \pi_6 \\ \pi_2 &= x_1 x_2 & \pi_4 &= \varepsilon_1 x_1 - \pi_9 & \pi_6 &= x_2 \pi_4 & \pi_8 &= x_1 \pi_6 \end{aligned} \quad (2.127)$$

A relação  $\pi_4 + \pi_9 - \varepsilon_1 x_1 = 0$  é obtida da expressão da função racional  $\zeta(x)$  reescrita como  $\zeta(x)(x_2^2 + 1) = \varepsilon_1 x_1$  e da mudança de variáveis  $\zeta(x) = \pi_4$  e  $\pi_9 = x_2^2 \pi_4$ . Usando as relações dadas em (2.127) obtém-se a representação (2.39) com as matrizes a seguir:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \\ 0 & -x_2 \\ -\varepsilon_1 & 0 \\ 0_{5 \times 1} & 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 3} & F_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

onde

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e os anuladores utilizados neste caso foram:

$$\mathfrak{K}_{\pi_b}(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 \end{bmatrix}. \quad (2.130)$$

É possível verificar que  $\det(F(x)) = x_2^2 + 1$  e, então, a Suposição 2.2, de que  $F(x)$  é inversível, é assegurada globalmente. Observe que  $x_2^2 + 1 \neq 0$  aparece naturalmente como uma exigência bem posta na função racional  $\zeta(x)$  do sistema original (2.124).

Na representação do sistema dada por (2.128) e (2.129), a função matricial  $G(x)$  é afim com respeito à  $x$ ,  $\varepsilon_1$ . Isto nos permite considerar este parâmetro como incerto, se desejável. Veja o Exemplo 2.3 para detalhes na representação de sistemas incertos.

Lembrando que este sistema é localmente exponencialmente estável quando  $\varepsilon_1 < 1$ , a região de atração estimada indicada por  $\mathcal{E}_r$  na Figura 7 corresponde ao caso onde  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.5$  e  $v(x)$  é uma função racional como em (2.40). O politopo usado é indicado na Figura 7 através de suas faces  $\mathcal{F}_k$  com  $k \in \{1, \dots, 5\}$  e a verdadeira região de atração corresponde à curva tracejada.

O método de otimização utilizado neste exemplo foi baseado na minimização de alguns valores de  $v(x)$  dentro do politopo, próximos das faces, como sugerido na Observação 2.5.2. Os pontos considerados na otimização são indicados na Figura 7 por +. Esta estimativa foi obtida aumentando os fatores de ponderação para os pontos próximos da face  $\mathcal{F}_1$ , onde a estimativa era pobre, e diminuindo-os para os pontos próximos à face  $\mathcal{F}_2$ , onde a estimação era melhor.

Apenas para fins comparativos, a Figura 7 também mostra as estimativas  $\mathcal{E}_o$  para uma função de Lyapunov quadrática com a estrutura (2.42), e  $\mathcal{E}_n$  para uma função de Lyapunov independente dos termos racionais com a estrutura  $P = U'P_nU$  em que

$$U = \begin{bmatrix} I_{(n+p-6) \times (n+p-6)} & 0_{(n+p-6) \times 6} \end{bmatrix},$$

e  $P_n$  tem as dimensões apropriadas. Os politopos usados para ambas as

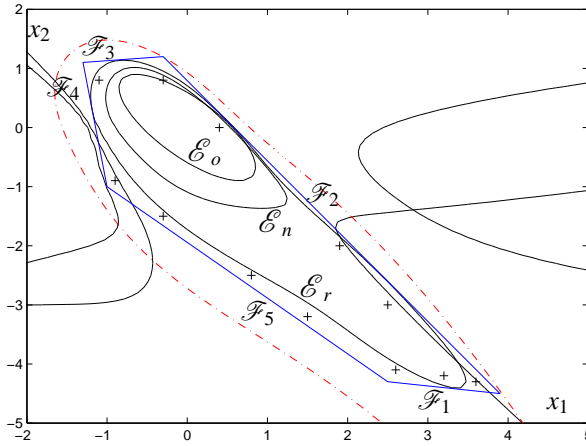


Figura 7: Regiões de atração estimadas para o sistema (2.124) com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$ .

estimativas são respectivamente indicados abaixo.

$$\mathcal{X}_o = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & -1.2 & 0 \\ -0.9 & -1 & 1 & 0.8 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{X}_n = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1.5 & -0.9 & -1.1 & -0.2 & 0.5 \\ -1.3 & -0.7 & 1.1 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vamos analisar agora o caso onde  $\varepsilon_1 = -1$  e  $\varepsilon_2 = 0$ . Nesta situação o sistema é globalmente exponencialmente estável e a função de Lyapunov  $v(x) = x'x$  prova isto. Impondo a estrutura (2.42) na função de Lyapunov e usando o Corolário 2.2 obtém-se

$$P_0 = \begin{bmatrix} 560.1586 & 241.1826 \\ 241.1826 & 406.5339 \end{bmatrix},$$

que confirma a estabilidade assintótica global através da função de Lyapunov  $x'P_0x$ . O Corolário 2.2 também é factível com  $P_0 = I_2$ .  $\square$

**Exemplo 2.5** Considere o sistema não linear escalar  $\dot{x} = -x^3$  que pode ser

representado como em (2.39) com  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = [0 \ -1]$  e

$$G(x) = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \end{bmatrix}, F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix}, \pi = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Este sistema não é localmente exponencialmente estável, então as condições do Teorema 2.2 falham porque a LMI (2.66) é estrita. Veja as Observações 2.4.2 e 2.4.3 para mais detalhes. Usando a versão geral deste teorema onde (2.66) é substituída (2.75), pode-se provar a estabilidade local assintótica da origem com a função de Lyapunov (2.40) com a  $P$  indicada abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} 883.242 & 5.6406^{-15} & 0.6007 \\ 5.6406^{-15} & 41.197 & 7.2013^{-6} \\ 0.6007 & 7.2013^{-6} & 41.1472 \end{bmatrix}.$$

Além disso, pode-se provar estabilidade assintótica global do sistema usando o Corolário 2.2 com a função de Lyapunov (2.40) e a  $P$  indicada a seguir.

$$P = \begin{bmatrix} 6.587 & -7.06 \times 10^{-11} & 0.7772 \\ -7.06 \times 10^{-11} & 3.8766 & -1.38 \times 10^{-9} \\ 0.7772 & -1.38 \times 10^{-9} & 14.403 \end{bmatrix}.$$

□

**Exemplo 2.6** Considere agora o sistema a seguir estudado em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2^2 \\ x_1 - x_2 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Como este sistema tem não linearidades com monômios de até grau 3, pode-se introduzir o mesmo conjunto de funções não lineares  $\pi$  usadas no Exemplo 2.2 e, conseqüentemente, as matrizes da representação do sistema  $G(x)$ ,  $F(x)$  e os anuladores  $\mathfrak{K}_{\pi_b}(x)$  também são os mesmos. Podemos completar a representação do sistema (2.131) como em (2.39) com as matrizes  $A_0$ ,  $A_1$ , respectivamente, indicadas a seguir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estimar a região de atração para este sistema, que tem a verdadeira região de atração representada pelo interior das curvas tracejadas na

Figura 8, é usado um politopo  $\mathcal{X}$  definido por

$$\mathcal{X} = \mathbf{Co} \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_1 \end{array} \right\},$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são variáveis escalares a serem determinadas.

De modo a comparar os resultados com (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008), será iniciado com  $\alpha_2 = 0$  e aumentar  $\alpha_1$ , usando uma função de Lyapunov quadrática com a estrutura (2.42). Aumentando  $\alpha_1$  a partir de zero, obtém-se a estimativa  $\mathcal{E}_0$  representada na Figura 8 pela curva mais interna e correspondendo à  $\alpha_1 = 1.7$ . Para este valor de  $\alpha_1$  o politopo toca na verdadeira região de atração, e a estimativa correspondente é similar à encontrada em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008) com uma função de Lyapunov também quadrática. A estimativa encontrada em (COUTINHO; DE SOUZA; TROFINO, 2008) com uma função de Lyapunov de grau 6 é apenas um pouco maior que  $\mathcal{E}_0$ .

Uma melhor estimativa pode ser obtida usando uma função de Lyapunov mais complexa, onde  $P = P'$  é uma matriz livre a ser determinada. Com isso, e baseado no conhecimento do formato da verdadeira região de atração, foi possível redefinir o politopo e obter  $\alpha_1 = 1.9$  e  $\alpha_2 = 0.35$ . A fronteira da estimativa obtida neste caso toca as faces do politopo quase inteiramente e é indicada por  $\mathcal{E}$  na Figura 8.

A estimativa pode ser melhorada ainda mais usando os resultados da Seção 2.5.3, onde o conjunto de condições iniciais é uma união de politopos. Os politopos  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ , mostrados na Figura 9, são definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \mathbf{Co} \left\{ \begin{array}{cccc} -0.4 & 0.4 & 0.1 & 1.9 \\ 1.35 & -1.35 & 2.3 & -0.4 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{X}_2 &= \mathbf{Co} \left\{ \begin{array}{cccc} -0.4 & 0.4 & -0.1 & -1.9 \\ 1.35 & -1.35 & -2.3 & 0.4 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

A união destes politopos forma uma região não convexa, como em (2.90), e apenas suas faces externas são consideradas na condição de inclusão (2.97). Usando a otimização (2.84), obtém-se a estimativa mostrada na Figura 9 denotada pela curva  $\mathcal{E}$ . Essa estimativa é maior que as apresentadas na Figura 8 e é uma região não convexa, quase tocando a união não convexa dos politopos  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ . Uma estimativa ainda melhor pode ser obtida aumentando-se o número de vértices.  $\square$

**Exemplo 2.7** Considere agora o problema de estimar a região de atração



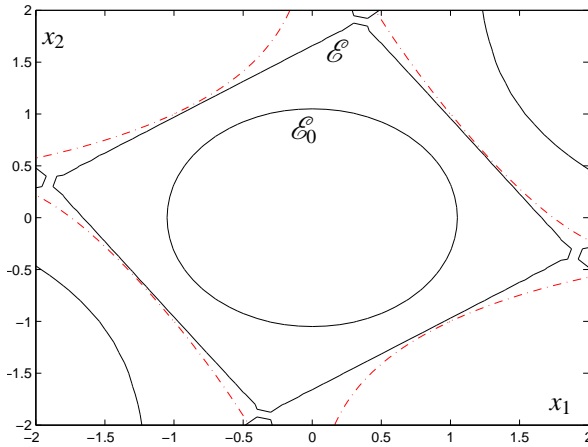


Figura 8: Regiões de atração estimadas para o sistema (2.131).

da origem do seguinte sistema, emprestado de (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.132)$$

Este sistema tem não linearidades de grau 3, e por esta razão é usado o mesmo conjunto de funções não lineares  $\pi$  já usados no Exemplo 2.2. Portanto  $G(x)$ ,  $F(x)$  e o anulador  $\mathfrak{X}_{\pi_b}(x)$  são os mesmos também. A representação do sistema (2.132) é completada como em (2.39) como as matrizes  $A_0$ ,  $A_1$ , respectivamente, indicadas abaixo.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando os resultados da Seção 2.5.3, são considerados os politopos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.9 & 0.9 & -3.2 & 0.1 & -3 \\ -0.9 & 0.9 & 0 & 2.8 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{X}_2 &= \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.9 & 0.9 & 3.2 & -0.1 & 3 \\ -0.9 & 0.9 & 0 & -2.8 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

O método de otimização utilizado é o de minimizar os valores de  $v(x)$

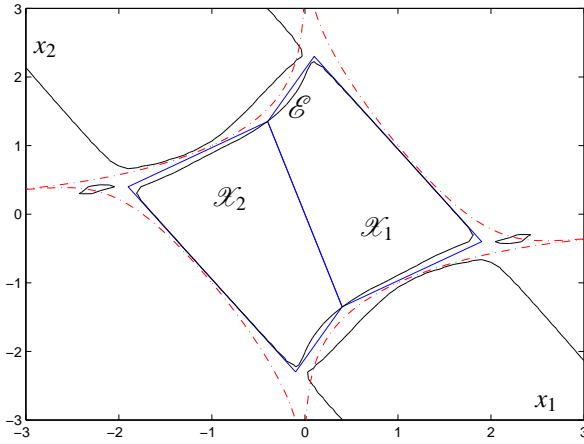


Figura 9: Região de atração estimada para o sistema (2.131) considerando a união dos polítopos  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ .

próximos das faces do polítopo não convexo, da mesma forma que no Exemplo 2.4, apresentado na Observação 2.5.2. Com isso, obtém-se a estimativa  $\mathcal{E}$  mostrada na Figura 10.

De modo a obter uma melhor estimativa, pode-se aumentar o grau da função de Lyapunov de 6 para 8. A nova representação do sistema é indicada a seguir.

$$\begin{aligned} \pi_e &= \begin{bmatrix} \pi' & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & x_2^4 \end{bmatrix}', \\ A_{0e} &= A_0, \quad A_{1e} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{2 \times 5} \end{bmatrix}, \quad G_e(x) = \begin{bmatrix} G(x)' & 0_{2 \times 5} \end{bmatrix}, \\ F_e(x) &= \begin{bmatrix} F(x) & 0_{7 \times 5} \\ F_{e21}(x) & I_5 \end{bmatrix}, \quad F_{e21}(x) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{5 \times 3} & 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{N}_{\pi_e}(x) &= \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{\pi_b} & 0_{6 \times 5} \\ 0_{4 \times 9} & \mathfrak{N}_{\pi_{e22}}(x) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

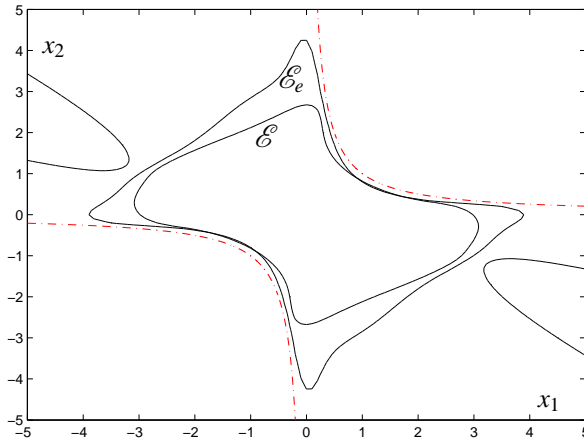


Figura 10: Regiões de atração estimadas para o sistema (2.132).

onde

$$\mathfrak{K}_{\pi_{e22}}(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, é usada uma união não convexa maior, composta pelos seguintes dois polítopos convexos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{1e} &= \mathbf{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.9 & 0.9 & 4.5 & 0 \\ -0.9 & 0.9 & 0 & -4.5 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{X}_{2e} &= \mathbf{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.9 & 0.9 & -4.5 & 0 \\ -0.9 & 0.9 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

A nova estimativa é denotada por  $\mathcal{E}_e$  na Figura 10. Esta poderia ainda ser melhorada reajustando os polítopos.  $\square$

## 2.8 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo foram detalhadas as principais contribuições apresentadas nesta dissertação, que consistem em uma técnica LMI para testar

as condições de estabilidade assintótica de sistemas racionais usando uma função de Lyapunov também racional. Foram propostas soluções para os problemas de estabilidade local, regional e global.

Nos problemas de estabilidade regional foram consideradas as situações em que o conjunto de estados iniciais  $\mathcal{X}$  é convexo (um único politopo) e que o conjunto não é convexo (é uma união entre politopos convexos). Através dos exemplos pode-se observar que considerando a segunda situação é possível até mesmo obter regiões de atração (curva de nível de  $v(x) = 1$ ) não convexas. Ainda com relação aos exemplos numéricos apresentados, pôde-se visualizar o procedimento de aplicação desta abordagem e suas vantagens em comparação à outros casos.

Como um segundo resultado da estabilidade global pode ser formulado o Corolário 2.4 que se trata de um novo método para evitar crescimento exponencial das LMIs com o número de parâmetros e estados, que possibilita checar a factibilidade das LMIs sem necessitar considerar um politopo. Como visto no final da Seção 2.6, o conservadorismo deste método é tipicamente desprezível se comparado à abordagem politópica.

### 3 PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO

#### 3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo a apresentação de uma técnica de chaveamento para aplicação em controle de sistemas comutados utilizando uma abordagem LMI. Para isso, primeiramente são apresentadas as condições que garantem que o sistema comutado seja estável, inclusive durante a possível ocorrência de modos deslizantes. Isso é feito baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov, utilizando múltiplas funções de Lyapunov, uma para cada modo do sistema, que compõem uma função de Lyapunov comutada (a do modo ativo no respectivo instante).

Os resultados apresentados neste capítulo dão continuidade a pesquisas anteriores. Em (ASSMANN, 2008) é apresentada a técnica de chaveamento, mas ainda sem considerar a possibilidade de existência de modos deslizantes. Aqui será tratado apenas o caso de medição total dos estados. O caso de realimentação de saída pode ser encontrado em (TROFINO et al., 2009).

Ao final do capítulo, é apresentado um exemplo simples de aplicação da técnica em um sistema comutado particular da eletrônica de potência: o conversor abaixador de tensão (Buck).

#### 3.2 Condições de Projeto da Lei de Chaveamento

Nesta seção é explicado projeto de uma lei de chaveamento que estabilize um sistema afim no estado por meio da comutação entre os possíveis modos dinâmicos do sistema. Existem diferentes tipos de chaveamento, como por exemplo, chaveamento dependente do tempo (como feito por PWM, dado um ciclo de trabalho desejado) e chaveamento dependente do estado do sistema (LIBERZON, 2003). Neste trabalho estamos interessados no segundo caso, mais especificamente com o chaveamento baseado em uma função de Lyapunov dependente dos estados.

Considere um sistema dinâmico cuja estrutura varia durante a operação. Suponha que as dinâmicas durante cada modo de operação possam ser representadas por um campo vetorial afim como a seguir:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad y(t) = Cx(t), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}, \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado do sistema,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o vetor de medidas,  $m$  é o número de modos de operação, e  $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{n_x}$  e  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  são as

matrizes dadas da estrutura.

Vamos supor que as mudanças entre os  $m$  modos de operação de (3.1) ocorrem de acordo com a lei de chaveamento representada pelo sinal

$$\sigma(y(t)) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (3.2)$$

que pode ser visto como um mapeamento do vetor de medidas, a cada instante de tempo  $t$ , para o índice  $\sigma(y(t)) \in \mathcal{M}$  do modo de operação atual (ativo).

O problema de interesse consiste em projetar uma lei de chaveamento que assintoticamente leva o estado do sistema para o ponto de equilíbrio desejado  $\bar{x}$  do sistema chaveado (em malha fechada). Então,  $\bar{x}$  deve ser globalmente assintoticamente estável. A Equação (3.3) a seguir apresenta a dinâmica do sistema comutado, que corresponde ao sistema do modo que estiver ativo a cada instante de tempo, *i.e.*  $i = \sigma$ .

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma, \quad y(t) = Cx(t), \quad \sigma(y(t)) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (3.3)$$

Dado o ponto de equilíbrio desejado  $\bar{x}$  e o modelo do sistema (3.3), o sistema do erro de seguimento é

$$\dot{e}(t) = A_\sigma e(t) + k_\sigma, \quad k_\sigma = b_\sigma + A_\sigma \bar{x}, \quad e(t) := x(t) + \bar{x}. \quad (3.4)$$

Graças ao sistema do erro definido na equação anterior, o problema de interesse pode ser redefinido como o de projetar uma lei de chaveamento que assintoticamente leva o estado de erro para a origem. Para este fim, vamos considerar o sinal chaveado  $\sigma(y(t))$  e a função de Lyapunov candidata  $v(e(t), \sigma)$  dados por

$$\sigma(y(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}, \quad (3.5)$$

$$v(e(t), \sigma) := v_\sigma(e(t)) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}, \quad (3.6)$$

onde  $v_i(e(t))$ ,  $i \in \mathcal{M}$  são funções auxiliares associadas com os modos de operação do sistema e satisfazem  $v_\sigma(0) = 0$ ,  $\forall \sigma \in \mathcal{M}$ .

As funções  $v_i(e(t))$ ,  $i \in \mathcal{M}$  devem ser determinadas de modo a obter uma função de Lyapunov exponencialmente decrescente  $v_\sigma(e(t))$  durante cada modo de operação do sistema em malha fechada (TROFINO et al., 2009). Essa exigência de performance pode ser expressa pela condição

$$\dot{v}_\sigma(e(t)) + \alpha_\sigma v_\sigma(e(t)) < 0, \quad v_\sigma(e(t)) > 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{M}, \quad e(t) \neq 0, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathcal{M}$  são constantes positivas determinadas, representando a taxa de decaimento exponencial desejada para  $v_\sigma(e(t))$  em cada modo de operação  $\sigma(y(t)) \in \mathcal{M}$  e  $v_\sigma(0) = 0$ . Será considerado apenas o caso de medição completa dos estados, portanto  $C = I_{n_x}$  e  $n_y = n_x$ . O caso de realimentação de saída (medição parcial dos estados) pode ser encontrado em (TROFINO et al., 2009).

### 3.2.1 Inclusão de condições para modos deslizantes estáveis

Apenas as condições apresentadas na seção anterior não são suficientes para garantir a estabilidade do sistema chaveado na ocorrência de modos deslizantes<sup>1</sup> (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010), neste caso, deve ser incluída uma condição que garanta isso.

Suponha que um modo deslizante ocorra na superfície de deslizamento  $\mathcal{S}$  definida entre os  $m_s$  modos de  $\mathcal{M}_s$ , onde  $\mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}$  explicita o conjunto dos modos considerados na superfície e  $m_s \leq m$ , i.e.

$$\mathcal{S} := \left\{ e(t) : v_i(e(t)) = v_j(e(t)), \forall i, j \in \mathcal{M}_s, i \neq j \right\} = \left\{ e(t) : \phi_s(e(t)) = 0 \right\}. \quad (3.8)$$

onde  $\phi_s$  é a combinação convexa das funções de Lyapunov dos modos em modo deslizante, definida como

$$\phi_s(e(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}_s} (\theta_i) v_i(e(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}_s} (\theta_i - \bar{\theta}_i) v_i(e(t)) \quad (3.9)$$

em que a inclusão do termo  $\bar{\theta}_i$ , possível devido à sua combinação convexa também ser nula no equilíbrio, tem como objetivo apenas facilitar a representação das condições mostradas no decorrer desta seção.

Na superfície de deslizamento descrita em (3.8) são assumidas as funções auxiliares  $v_i(e(t))$ ,  $i \in \mathcal{M}$ , com a seguinte estrutura, como em (TROFINO et al., 2009):

$$v_i(e(t)) = e(t)' P_i e(t) + 2e(t)' S_i, \quad P_i = P_i', \quad (3.10)$$

onde  $P_i$ ,  $S_i$  são matrizes a serem determinadas.

De acordo com os resultados de Fillipov, a dinâmica do sistema sob

---

<sup>1</sup>Do inglês, *sliding modes*.

modos deslizantes pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_s(\Theta(t))e(t) + k_s(\Theta(t)), \quad e(t) \in \mathcal{S}, \quad \Theta(t) \in \Delta, \\ A_s(\Theta(t)) &:= \sum_{i \in \mathcal{M}_s} A_i \theta_i(t), \\ k_s(\Theta(t)) &:= \sum_{i \in \mathcal{M}_s} k_i \theta_i(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\Theta = [\theta_i]_{col}^{m_s}$ ,  $i \in \mathcal{M}_s$ , e  $\Delta$  é o *simplex*<sup>2</sup> que indica os limites de  $\Theta$ , definido como

$$\Delta := \left\{ \theta_i \in [0, 1] : \sum_{i \in \mathcal{M}_s} \theta_i = 1 \right\}. \quad (3.12)$$

Como o equilíbrio desejado é a origem, observe de (3.11) que no equilíbrio devemos ter  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = \bar{\Theta}$  com  $k_s(\bar{\Theta}) = 0$ , (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010). Para mais detalhes neste ponto veja também (BOLZERN; SPINELLI, 2004). Observe portanto que  $\bar{\Theta}$  pode ser determinado sabendo-se que este deve satisfazer a expressão

$$k_s(\bar{\Theta}) = 0. \quad (3.13)$$

Uma das condições de projeto é a positividade da função de Lyapunov  $v_\sigma$ , inclusive em modo deslizante. Para isso, observe as seguintes relações:

$$\begin{aligned} v_\sigma(e(t)) &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} \\ &\geq \max_{i \in \mathcal{M}_s} \{v_i(e(t))\} \geq \sum_{i \in \mathcal{M}_s} v_i(e(t)) \tilde{\theta}_i \\ &= e(t)' \left( \sum_{i \in \mathcal{M}_s} P_i \tilde{\theta}_i \right) e(t) + \left( \sum_{i \in \mathcal{M}_s} S_i \tilde{\theta}_i \right) e(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\sigma(e(t))$  é o sinal de chaveamento dado definido como

$$\sigma(e(t)) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}, \quad (3.15)$$

A partir de (3.14),  $v_\sigma(e(t)) > 0$  é garantida se as seguintes restrições

---

<sup>2</sup>É a denominação dada à um politopo de dimensão  $m_s - 1$  em um espaço  $\mathbb{R}^{m_s}$ . Ao contrário de um politopo comum, cujo número de vértices ( $2^{m_s}$ ) cresce exponencialmente com o aumento de  $m_s$ , o número de vértices do simplex cresce linearmente e é o próprio valor de  $m_s$ .



são satisfeitas:

$$\sum_{i \in \mathcal{M}_s} P_i \tilde{\theta}_i > 0, \quad (3.16)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{M}_s} S_i \tilde{\theta}_i = 0. \quad (3.17)$$

O vetor de constantes  $\tilde{\Theta} := [\tilde{\theta}_i]_{col}^{m_s}$  é um parâmetro de projeto. Como  $\tilde{\Theta}$  representa o ciclo de trabalho no equilíbrio desejado, uma escolha natural é  $\tilde{\Theta} = \bar{\Theta}$ .

Tendo em mente que  $v_s(e(t))$  se situa na superfície de chaveamento (3.8), a condição (3.14) implica em

$$v_\sigma(e(t)) = e(t)' \sum_{i \in \mathcal{M}_s} P_i \tilde{\theta}_i e(t) > 0, \quad \forall e(t) \in \mathcal{S} - \{0\}, \quad (3.18)$$

e observe de (3.14) que  $v_\sigma(e(t))$  é contínua, positiva definida e radialmente ilimitada.

Segundo (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010),  $k_s(\Theta(t))$  pode ser visto como uma perturbação  $\mathcal{L}_2$  ao sistema (3.11) e estamos interessados em atenuar, o máximo possível, os efeitos desta entrada de perturbação em uma saída de performance especificada como  $y_s(t) = C_s e(t)$ , onde  $C_s$  é uma matriz dada. Este é um problema de controle comum que pode ser expresso pelas seguintes condições

$$\begin{aligned} \dot{v}_s(e(t)) + y_s(t)' y_s(t) / \gamma - \gamma k_s(\Theta(t))' k_s(\theta(t)) &< 0, \\ v_s(e(t)) = e(t)' \sum_{i \in \mathcal{M}_s} P_i \tilde{\theta}_i e(t) &> 0, \\ \forall e(t) \in \mathcal{S} - \{0\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $Q_s$  é uma matriz positiva definida a ser determinada, que vamos assumir que tenha a seguinte estrutura particular, obtida de (3.16):

$$Q_s := \sum_{i \in \mathcal{M}_s} P_i \tilde{\theta}_i > 0, \quad (3.20)$$

e  $\gamma$  é um limite para o pior caso do ganho de perturbação, descrito em (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010) como

$$\sup_{\|k_s(\Theta(t))\| \neq 0} \frac{\|y_s(t)\|}{\|k_s(\Theta(t))\|} < \gamma, \quad \Theta(t) \in \Delta. \quad (3.21)$$

### 3.2.2 Condições LMI do projeto

Nesta seção são apresentadas as condições LMI necessárias para o projeto de leis de chaveamento do tipo (3.5) que garantam estabilidade assintótica global para a dinâmica de erro em (3.4), dados os requisitos das seções anteriores. É usada a notação  $\sigma(e(t))$  para enfatizar que o sinal de chaveamento depende do erro de seguimento  $e(t) = x(t) + \bar{x}$  que é computado a cada instante de tempo a partir do estado  $x(t)$  e do ponto de equilíbrio desejado  $\bar{x}$  (conhecido *a priori*). Da Equação (3.10),  $P_i = P'_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $S_i \in \mathbb{R}^{n_x}$  são as matrizes determinadas através do teorema a seguir (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2010).

**Teorema 3.1** *Seja  $\bar{\Theta}$  uma constante positiva caracterizando o ponto de equilíbrio chaveado do sistema do erro, como indicado em (3.13) e (3.11). Considere a função de Lyapunov candidata  $v_\sigma(e(t))$  definida em (3.14) e (3.10). Seja  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathcal{M}$  constantes positivas dadas especificando a taxa de decaimento exponencial desejada de  $v_\sigma(e(t))$  em cada modo de operação  $\sigma(e(t)) \in \mathcal{M}$ . Em adição, sejam  $\beta$ ,  $\tilde{\Theta}$  constantes dadas e defina  $Q_s$  como em (3.20).*

*Suponha que existam matrizes  $P_i$ ,  $S_i$ ,  $i \in \mathcal{M}$ , e um escalar positivo  $\gamma$  que resolva o seguinte problema de otimização:*

$$\min_{P_i, S_i, \gamma} \gamma \text{ sujeito à (3.16), (3.17) e}$$

$$\begin{bmatrix} P_i A_i + A'_i P_i & P_i k_i + A'_i S_i \\ k'_i P_i + S'_i A_i & 2S'_i k_i \end{bmatrix} + \alpha_i \begin{bmatrix} P_i & S_i \\ S'_i & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad P_i = P'_i, \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} Q_s A_s \Theta + A_s \Theta' Q_s + \beta_s P_s (\Theta - \bar{\Theta}) & Q_s H_s + \beta_s S_s + L_1 C_l & C'_s \\ (Q_s H_s + \beta_s S_s + L_1 C_l)' & -\gamma H'_s H_s + L_2 C_l + C'_l L'_2 & 0_{1 \times n_s} \\ C_s & 0_{n_s \times 1} & -\gamma I_{n_s} \end{bmatrix} < 0, \quad \Theta \in \Delta, \quad (3.23)$$

onde  $n_s$  é o número de linhas de  $C_s$ ,  $C_l = [1 \dots 1] \in \mathbb{R}^{m_s}$ ,  $L_1$  e  $L_2$ , com dimensões

*apropriadas, são variáveis a serem determinadas e*<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} A_s &= [A_i]_{lin}^{m_s}, i \in \mathcal{M}_s, \\ H_s &= [k_i]_{lin}^{m_s}, i \in \mathcal{M}_s, \\ P_s &= [P_i]_{lin}^{m_s}, i \in \mathcal{M}_s, \\ S_s &= [S_i]_{lin}^{m_s}, i \in \mathcal{M}_s. \end{aligned}$$

*Então o sistema do erro de seguimento (3.4) é globalmente assintoticamente estável com a estratégia de chaveamento dada por (3.15) e  $v_\sigma(e(t))$  é uma função de Lyapunov que prova isto. Além do mais,  $v_\sigma(e(t))$  satisfaz (3.7) em qualquer modo de operação, e sob modos deslizantes a condição de atenuação de perturbação (3.19) é satisfeita com  $v_s(e(t)) = v_\sigma(e(t))$ .*

**Prova:** Primeiramente, note que  $v_\sigma(e(t))$  é contínua, positiva definida e radialmente ilimitada de (3.14). Multiplicando (3.22) por  $\zeta' := [e(t)' \ 1]$  à esquerda e sua tranposta à direita, obtém-se a condição (3.7).

Em seguida, é analisado o comportamento do sistema sob modo deslizante. Levando em conta o sistema (3.11), podemos reescrever (3.19) como

$$e(t)' (Q_s A_s(\Theta) + A_s(\Theta)' Q_s) e(t) + 2e(t)' Q_s k_s(\Theta) + \frac{y_s(t)' y_s(t)}{\gamma} - \gamma k_s(\Theta)' k_s(\Theta) < 0 \quad (3.24)$$

$$\forall e(t) \in \mathcal{S} - \{0\}, \quad (3.25)$$

Sabendo que  $H_s = [k_i]_{lin}^{m_s}$   $i \in \mathcal{M}_s$  e usando a seguinte notação

$$\zeta = \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} Q_s A_s(\Theta) + A_s(\Theta)' Q_s + \frac{C_s' C_s}{\gamma} & Q_s H_s \\ H_s' Q_s & -\gamma H_s' H_s \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

podemos reescrever (3.24) como  $\zeta' \Psi \zeta < 0$ ,  $\forall \zeta \neq \bar{\zeta}$ ,  $e(t) \in \mathcal{S}$ , onde  $\bar{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Theta}' \end{bmatrix}'$  é o valor de  $\zeta$  no equilíbrio do sistema. Observe para  $e(t) = 0$  e  $\Theta(t) = \bar{\Theta}$  que obtém-se  $\Psi \bar{\zeta} = 0$  como  $k_s(\bar{\Theta}) = 0$  é assegurada de (3.13). Então a seguinte identidade é verdadeira:

$$\zeta' \Psi \zeta = (\zeta - \bar{\zeta})' \Psi (\zeta - \bar{\zeta}), \quad (\zeta - \bar{\zeta}) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

<sup>3</sup>Ver “Notação” nos elementos pré-textuais para mais detalhes quanto à notação adotada.

Veja agora que, a combinação convexa que define a superfície de deslizamento, dada em (3.9), pode ser reescrita como

$$\phi_s(e(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}_s} e' P_i e(\theta_i - \bar{\theta}_i) + 2e' S_i(\theta_i - \bar{\theta}_i), \quad (3.28)$$

e considerando  $P_s = [P_i]_{lin}^{m_s}$ ,  $i \in \mathcal{M}_s$ ,  $S_s = [S_i]_{lin}^{m_s}$ ,  $i \in \mathcal{M}_s$ , pode-se reescrever (3.28) como

$$\phi_s(\zeta) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} P_s(\Theta - \bar{\Theta}) & S_s \\ S_s' & 0 \end{bmatrix}}_{G_s} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.29)$$

Observe ainda que a condição  $\sum_{i \in \mathcal{M}_s} \theta_i - \bar{\theta}_i = 0$  pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} 0 & C_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.30)$$

onde  $C_l$  é um vetor linha de dimensão  $m_s$  com todos os elementos iguais à 1.

As restrições (3.29) e (3.30) podem ser incluídas em (3.27) através do Lema de Finsler, resultando na condição

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix}' \left( \Psi + \beta_s G_s + \begin{bmatrix} 0 & L_1 C_l \\ (L_1 C_l)' & L_2 C_l + C_l' L_2' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e(t) \\ \Theta(t) - \bar{\Theta} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.31)$$

e que finalmente, aplicando o Complemento de Schur para retirar a variável  $\gamma$  do denominador, resulta na LMI (3.23), que garante estabilidade sob modo deslizante entre  $m_s$  modos, finalizando a prova.  $\square$

Uma prova mais detalhada para as LMIs (3.22) do Teorema 3.1 pode ser encontrada em (TROFINO et al., 2009), assim como o projeto da lei de chaveamento para sistemas com medição parcial dos estados e com a consideração de ponto de equilíbrio incerto utilizando filtros *washout* (HASSOUNEH; LEE; ABED, 2004) e um exemplo numérico. No caso abordado em (TROFINO et al., 2009), o filtro *washout* acrescenta um estado ao sistema cuja saída é nula quando o estado filtrado (o estado cujo equilíbrio é desconhecido) atinge seu equilíbrio (BORGES; PAGANO, 2002).

**Observação 3.2.1** *Conforme visto em (TROFINO et al., 2009) e (ASSMANN, 2008), as constantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  que representam a taxa de decrescimento em cada modo de operação podem ser escolhidas de forma que o valor de  $-\alpha_i/2$  esteja no intervalo entre a parte real do menor autovalor estável de*

$A_i$  e zero. □

**Observação 3.2.2** É possível considerar que as matrizes do sistema,  $A_i$  e  $k_i$ , presentes nas LMIs do teorema 3.1, dependam de forma afim em um parâmetro incerto  $\delta$ , i.e.  $A_i(\delta)$  e  $k_i(\delta)$  apenas para o caso em que  $m_s = 2$ , desde que a diferença  $A_{12} = A_1(\delta) - A_2(\delta)$  anule os elementos incertos. Neste caso o teorema continua válido e o resultado é considerado robusto para uma faixa de valores de  $\delta$  considerados em um politopo. Para mostrar isso, note que quando  $m_s = 2$  tem-se  $\theta_2 = 1 - \theta_1$ , portanto podemos reescrever  $A_s$  como

$$\begin{aligned} A_s(\Theta, \delta) &= \theta_1 A_1(\delta) + \theta_2 A_2(\delta) = \\ &\quad \theta_1 (A_1(\delta) - A_2(\delta)) + A_2(\delta) = \\ &\quad \theta_1 (A_{12}) + A_2(\delta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

portanto, não há multiplicação entre os elementos em politopo  $\Theta$  e  $\delta$  e a convexidade é mantida. A dedução é a mesma para  $k_s(\Theta, \delta)$ . Para o caso em que  $m_s > 2$ , o problema precisa ser reformulado para que a consideração das incertezas não torne a LMI (3.23) não convexa. □

**Observação 3.2.3** O Teorema 3.1 foi desenvolvido para garantir estabilidade considerando apenas uma superfície de modos deslizantes. Este pode ser facilmente generalizado para o caso em que múltiplas superfícies de modos deslizantes são possíveis. Para isso, observe que as condições (3.16), (3.17) e (3.23) devem ser satisfeitas para cada uma das  $n_k$  superfícies consideradas, onde cada superfície tem um subconjunto de modos em modo deslizante diferente, i.e.  $\mathcal{M}_{sk}$ ,  $k \in \{1, \dots, n_k\}$ . A Seção 5.7 ilustra este ponto. □

### 3.3 Exemplo de Aplicação: Conversor Buck

Nesta seção é apresentado de maneira sucinta o modelo do conversor CC/CC abaixador de tensão (*Buck*) e então a aplicação da técnica de chaveamento apresentada neste capítulo. Maiores detalhes sobre a modelagem e aplicação deste circuito podem ser vistos nos livros (RASHID, 1999) e (BARBI; MARTINS, 2008). A Figura 11 apresenta o diagrama do circuito de um conversor *Buck*. Nesta topologia a tensão média na saída  $E_{out}$  é sempre menor que a tensão de entrada  $E_{in}$ . Em aplicações práticas a chave  $S$  pode ser implementada através de transistores de potência ou tiristores. O resistor  $R_L$  e o indutor  $L_L$  compõem a carga do conversor.

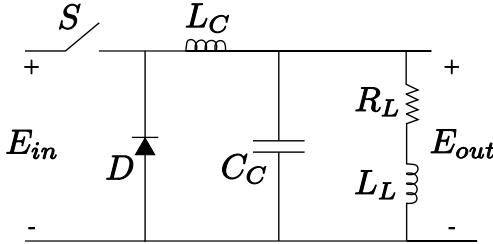


Figura 11: Conversor abaixador de tensão (*Buck*).

A operação do circuito pode ser dividida em dois modos. O modo 1 corresponde à chave  $S$  ligada. Neste modo a corrente de entrada circula através do indutor de filtro  $L_C$ , do capacitor de filtro  $C_C$  e da carga. Quando a chave  $S$  está desligada o circuito opera no modo 2. Considerando que  $L_C$  e  $C_C$  possuem energia armazenada, o diodo de comutação  $D$  irá conduzir neste modo. Caso a chave permaneça desligada no modo 2, o valor da corrente vai diminuir até a dissipação completa da energia armazenada em  $L_C$  e  $C_C$ . Dependendo da frequência de chaveamento, da indutância e capacitância de filtro, a corrente no indutor pode ser descontínua (RASHID, 1999), (BARBI; MARTINS, 2008).

O modelo matemático deste conversor pode ser descrito através da representação em espaço de estados de um sistema chaveado linear, em um formato semelhante à equação (3.1):

$$\dot{x} = A_i x + b_i, \quad i \in \mathcal{M} := \{1, 2\}, \quad (3.33)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^3$  e

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_C} & -\frac{1}{C_C} \\ -\frac{1}{L_C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_L} & 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_{in}}{L_C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = 0_{3 \times 1}. \quad (3.34)$$

Os estados do sistema são a tensão no capacitor  $C_C$  ( $x_1$ ), a corrente no indutor  $L_C$  ( $x_2$ ) e a corrente na carga ( $x_3$ ). Nesta modelagem assume-se que as comutações da chave  $S$  e do diodo  $D$  são ideais (instantâneas) e que o conversor opera em modo de condução contínua, ou seja, durante o chaveamento a corrente no indutor não atinge o valor nulo no tempo em que o circuito opera no modo 2.

A relação entre o valor médio da função de chaveamento que aciona  $S$  com o período de comutação é denominada de razão cíclica ou ciclo de trabalho (*duty cycle*). O valor da razão cíclica ( $\bar{\theta}$ ) varia de zero (quando a chave  $S$  está permanentemente aberta e o sistema opera no modo 2) a um, que corresponde à chave permanentemente fechada (modo 1). Idealmente, para o caso do conversor *Buck* seria possível regular a tensão média da saída para valores entre zero até o valor da tensão de entrada através da variação de  $\bar{\theta}$ . A expressão que relaciona a tensão média na saída com a tensão da entrada e a razão cíclica nos conversores *Buck* é vista a seguir:

$$\bar{\theta} = \frac{E_{out}}{E_{in}}. \quad (3.35)$$

Para exemplificar a técnica de chaveamento, será considerado o caso de realimentação total dos estados do conversor Buck com a topologia vista na Figura 11. O conjunto de parâmetros utilizado na resolução numérica é mostrado na Tabela 1. Desta forma, os autovalores das matrizes  $A_i$  serão  $\{-262441; -18779 \pm j28114\}$ . Será considerada uma referência para a tensão de saída  $E_{out} = 9V$ . Os valores  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5000$  foram escolhidos de acordo com a Observação 3.2.1.

Parâmetro	Valor
$E_{in}$	15V
$L_C$	$10^{-3}H$
$C_C$	$10^{-6}F$
$L_L$	$10^{-4}H$
$R_L$	$30\Omega$

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do conversor *Buck*.

O ponto de equilíbrio desejado  $\bar{x}$  e as constantes  $k_i$  são descritas a seguir:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} E_{out} \\ \frac{E_{out}}{R_L} \\ \frac{E_{out}}{R_L} \end{bmatrix}, \quad k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_{out}}{L_C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_{out}}{L_C} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Para a solução das LMIs do Teorema 3.1 foram utilizados  $\beta_s = 10^{-3}$  e  $C_s = [1 \ 0 \ 0]$ . Foi considerada ainda que  $\tilde{\theta} = \bar{\theta}$ , sendo  $\bar{\theta} = 0.6$  numericamente

determinado através dos parâmetros do sistema e da equação 3.35. Tendo em vista que  $A_s = A_1 = A_2$  independente do valor de  $\Theta := [\theta_1 \ \theta_2]'$ , é necessário considerar 3.23 somente em um dos dois vértices do politopo  $\Theta \in \Delta$ . Note que para este sistema em particular, o sistema seria estável, mesmo sem considerar a LMI de modo deslizante estável e fazendo  $P_1 = P_2$ , pois o sistema é estável nos dois modos e, portanto, a sua combinação convexa também.

Para a situação descrita anteriormente, foi possível obter solução para o problema. A Figura 12 apresenta os resultados obtidos com a simulação da aplicação da estratégia de controle com realimentação de estados, utilizando a lei de chaveamento  $\sigma(e(t))$  indicada em (3.5), com os valores das matrizes  $P_i$  e  $S_i$  calculados pela solução das LMIs conforme citado anteriormente.

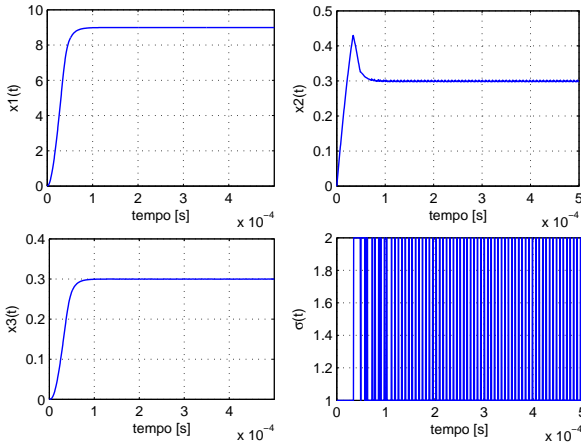


Figura 12: Resultados de simulação do conversor *Buck* com a lei de chaveamento projetada.

Analisando os resultados obtidos em simulação, verifica-se que o requisito de erro nulo em regime foi atingido quando o sistema opera com o valor nominal de  $R_L$  dado. Esta configuração ainda não apresenta robustez pois o sistema não conseguiu atingir o valor de referência desejado após a aplicação da carga. Mesmo tratando  $R_L$  como um parâmetro incerto, ainda tem-se o problema de que o equilíbrio se torna incerto, por ser dependente de  $R_L$ . Neste caso, uma solução é utilizar filtros *washout*, como mostrado em (TROFINO et al., 2009).



### 3.4 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo foi apresentada uma técnica de chaveamento cujo objetivo é a estabilidade de sistemas comutados. Esta técnica pode ser aplicada para o caso de seguimento de referência e possui garantias de desempenho. Primeiramente, foram mostradas as condições básicas para a estabilidade de um sistema comutado utilizando uma função de Lyapunov comutada, proveniente de múltiplas funções de Lyapunov (uma em cada modo de operação do sistema). No caso, estas condições são a positividade da função de Lyapunov comutada e a negatividade de sua derivada.

Na sequência foi comentado o comportamento do sistema no caso deste entrar em modos deslizantes, em que apenas as condições anteriores não bastam. Por isso, foram apresentadas condições para garantir a estabilidade do sistema comutado em modos deslizantes. Estas condições foram definidas de forma geral o suficiente para considerar a ocorrência de superfícies de deslizamento entre vários modos simultaneamente. No fim, a aplicação da técnica foi exemplificada em um sistema comutado simples: o conversor *Buck*.

A estrutura considerada das funções de Lyapunov possui uma forma apenas quadrática dos erros do sistema, o que pode ser conservador. Isso leva a concluir que a futura combinação das técnicas aqui apresentadas com as do Capítulo 2 pode levar à redução do conservadorismo ao se permitir o uso de uma função de Lyapunov muito mais rica, dependente de tantas não linearidades quanto se queira.



## 4 MODELAGEM DE SISTEMAS INVERSOR-MÁQUINA

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta de maneira sucinta a modelagem de máquinas de indução trifásicas, ressaltando as diferenças para o caso de rotor bobinado (acessível através de escovas) e rotor em gaiola (inacessível). São apresentadas também as transformações entre sistemas de coordenadas utilizadas para obtenção de um modelo mais conveniente para o uso na formulação proposta neste trabalho. Em seguida, é apresentado o acionamento da máquina através de inversor de frequência e seu modelo de comutação.

O principal objetivo deste capítulo é fornecer a base teórica e matemática sobre máquinas de indução necessária para a aplicação da técnica de chaveamento apresentada no Capítulo 3 em máquinas de indução, o que será mostrado no Capítulo 5. Embora o modelo da máquina seja bastante complexo devido às suas características construtivas e de acionamento, na literatura pode-se encontrar várias formas de modelagem e mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em (BARBI, 1985), (LEI et al., 2006) e (ANAYA-LARA et al., 2009). Por este capítulo se tratar de uma revisão bibliográfica do tema, sem contribuições, o leitor com experiência nesta área pode ir diretamente ao próximo capítulo, da aplicação da técnica de chaveamento na máquina, se desejar.

O modelo apresentado aqui é genérico e serve tanto para o caso da máquina de indução operar como motor quanto gerador. Entretanto, no segundo caso é comum a conexão do gerador à um sistema de transmissão de energia elétrica para fins de distribuição, como em (TARNOWSKI; REGINATTO, 2006), e por isso costuma-se considerar as variáveis no sistema *por unidade* (pu) e convencionar como positivas as potências que fluem da máquina para a rede e negativas da rede para a máquina. Estas considerações não serão tratadas aqui, mas podem ser vistas em (ANAYA-LARA et al., 2009) e sua utilização em (TARNOWSKI; REGINATTO, 2007).

### 4.2 Modelagem Trifásica da Máquina de Indução

A modelagem matemática da máquina de indução é feita a partir do conhecimento das dinâmicas elétricas e mecânicas presentes nesta. As equações que descrevem as máquinas com rotor em gaiola e com rotor bobinado são idênticas, exceto pelo fato de que no primeiro caso as tensões do rotor são nulas, enquanto no segundo não são.

### 4.2.1 Dinâmica elétrica

Considere uma máquina de indução trifásica simples de 2 polos com conexão estrela, cujo rotor está girando com uma frequência angular  $\omega_r$ . Uma vista axial representativa desta máquina pode ser vista na Figura 13. Na Figura 13, os eixos  $as$ ,  $bs$  e  $cs$  estão fixos ao estator e indicam os sentidos positivos dos fluxos magnéticos criados pelos enrolamentos das fases  $a$ ,  $b$  e  $c$  do estator, respectivamente. Da mesma maneira, os eixos  $ar$ ,  $br$  e  $cr$  estão fixos ao rotor e indicam os sentidos positivos dos fluxos magnéticos criados pelos enrolamentos das fases  $a$ ,  $b$  e  $c$  do rotor, respectivamente.

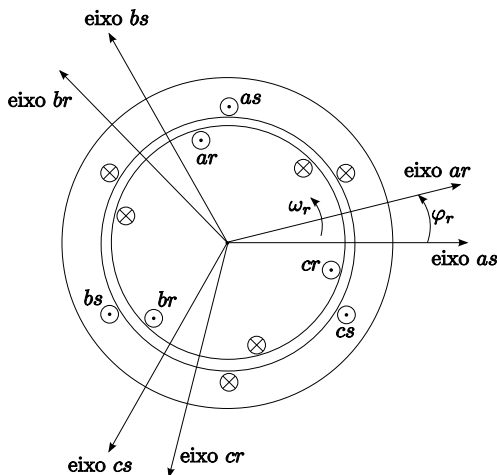


Figura 13: Vista axial representativa de uma máquina de indução.

A forma construtiva de um rotor em gaiola não determina um sistema de enrolamentos trifásicos. Mesmo assim, o efeito eletromagnético que este tipo de rotor produz pode ser representado por um sistema trifásico equivalente, devido ao fato de que o fluxo magnético criado pelas correntes no rotor possui as mesmas características que um fluxo criado por um sistema de enrolamentos trifásicos.

Na determinação das equações que modelam a máquina, são feitas as seguintes considerações (BARBI, 1985), (FERREIRA, 2004):

- simetria elétrica e espacial entre as três fases, tanto no estator como no rotor;

- distribuição senoidal do fluxo magnético no entreferro, considerado constante;
- circuito magnético linear (ideal), desprezando os efeitos de saturação;
- perdas magnéticas e mecânicas inexistentes;
- fluxo de potência elétrica entrando na máquina.

Considerando as restrições acima e sabendo que somatório das tensões de uma malha é nulo, as equações das tensões das fases  $abc$ , do estator e do rotor, respectivamente expressas em função das outras variáveis de máquina, são:

$$\dot{\phi}_{abc} = -R_s I_3 i_{abc} + V_{abc} \quad (4.1)$$

$$\dot{\phi}_{abcr} = -R_r I_3 i_{abcr} + V_{abcr}, \quad (4.2)$$

onde  $V_{abc} = [V_a \ V_b \ V_c]'$  é o vetor das tensões de fase,  $i_{abc} = [i_a \ i_b \ i_c]'$  é o vetor das correntes de fase,  $\phi_{abc} = [\phi_a \ \phi_b \ \phi_c]'$  é o vetor dos fluxos resultantes de cada fase, e  $R_s$  e  $R_r$  são resistências constantes do estator e do rotor, respectivamente. Os sub-índices  $s$  e  $r$  indicam, respectivamente, variáveis do estator e do rotor.

As grandezas da Equação (4.2) estão referenciadas ao circuito do estator, através da relação de transformação  $k_{sr}$  dada por:

$$k_{sr} = \frac{N_s}{N_r} \cong \frac{\tilde{V}_s}{\tilde{V}_r}, \quad (4.3)$$

onde  $N_s$  e  $N_r$  são o número de espiras equivalentes do estator e do rotor, respectivamente, enquanto que  $\tilde{V}_s$  e  $\tilde{V}_r$  são os valores médios quadráticos (RMS)<sup>1</sup> das tensões por fase do estator e do rotor, respectivamente.

As grandezas do circuito do rotor (sub-índice  $rr$ ), referenciadas ao circuito do estator, estão dadas por:

$$i_{abcr} = \frac{1}{k_{sr}} i_{abcrr} \quad (4.4)$$

$$V_{abcr} = k_{sr} V_{abcrr} \quad (4.5)$$

$$\phi_{abcr} = k_{sr} \phi_{abcrr} \quad (4.6)$$

$$R_r = k_{sr}^2 R_{rr}, \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>Do inglês, *Root Mean Square*.

As variáveis da Equação (4.1) estão referenciadas a um sistema de coordenadas fixo ao estator, denominado sistema estacionário, sendo sua velocidade de rotação nula. As variáveis da Equação (4.2) estão referenciadas a um sistema de coordenadas fixo ao rotor, cuja velocidade de rotação corresponde à velocidade elétrica  $\omega_r$  do rotor.

#### 4.2.2 Dinâmica mecânica

Para completar o modelo, é necessário representar a dinâmica do movimento do rotor da máquina de indução, que é dada pelo balanço entre as potências elétrica e mecânica, apresentada a seguir:

$$J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + \tau_c = \tau_e, \quad (4.8)$$

onde:

$\tau_e$  - conjugado<sup>2</sup> eletromagnético;

$\tau_c$  - conjugado de carga;

$J_m$  - momento de inércia do sistema (motor e carga);

$B_m$  - coeficiente de atrito viscoso;

$\omega_m$  - velocidade angular mecânica do rotor;

e a relação entre a velocidade elétrica  $\omega_r$  e a velocidade mecânica  $\omega_m$ , que depende do número de pares de polos  $p$  da máquina, é dada por:

$$\omega_r = p \omega_m. \quad (4.9)$$

O torque eletromagnético é obtido a partir da energia armazenada no campo magnético das bobinas equivalentes do estator e do rotor, e pode ser escrito como (HAFFNER, 1998):

$$\tau_e = -p L_m (i_{abcs} \times i_{abcr}), \quad (4.10)$$

e aplicando a definição de produto vetorial entre  $i_{abcs}$  e  $i_{abcr}$ , podemos representar (4.10) como

$$\tau_e = -p L_m i'_{abcs} \begin{bmatrix} \sin \varphi_r & \sin \left( \varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \varphi_r + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \sin \left( \varphi_r + \frac{4\pi}{3} \right) & \sin \varphi_r & \sin \left( \varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \left( \varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \varphi_r + \frac{4\pi}{3} \right) & \sin \varphi_r \end{bmatrix} i_{abcr}, \quad (4.11)$$

---

<sup>2</sup>Também conhecido como torque.

onde  $\varphi_r$  representa a posição angular de uma fase do rotor em relação à mesma fase do estator e é mostrado na Figura 13.

### 4.3 Sistemas de Coordenadas - Transformação $\alpha\beta 0$

O equacionamento do motor pode ser escrito diretamente com base em um sistema de coordenadas trifásico, como em (4.1) e (4.2). Entretanto, de forma a simplificar o modelo, a representação é normalmente feita em coordenadas bifásicas.

Para viabilizar as conexões entre os blocos motor e inversor, são necessárias transformações de coordenadas que realizam a conversão de bifásico para trifásico, e vice-versa, adaptando o equacionamento do motor (bifásico) ao modelo do inversor, que emprega um sistema de coordenadas trifásico (BARBI, 1985).

As transformações tradicionalmente usadas para realizar essa mudança de coordenadas são a transformação de Clarke ou a transformação  $\alpha\beta 0$ . Neste trabalho será utilizada e detalhada apenas a transformação  $\alpha\beta 0$  e esta escolha se deve apenas à coincidência nos sentidos dos eixos de coordenadas com relação à transformação de Park que será apresentada na Seção 4.4.1. A transformação de Clarke é apenas uma representação alternativa da transformação  $\alpha\beta 0$ , diferindo desta apenas na orientação de seus eixos cartesianos, e pode ser encontrada em (BARBI, 1985) e (FERREIRA, 2004).

A transformação  $\alpha\beta 0$  realiza uma mudança do sistema de coordenadas trifásico para bifásico, caracterizando-se por preservar a amplitude, a frequência e o número de pólos. A expressão matemática do conjugado da máquina, entretanto, necessita ser corrigida devido a diminuição do número de fases.

Definindo-se:  $f_{abc}$ , como a grandeza vetorial  $f$ , representada no sistema de coordenadas trifásico, referenciado ao sistema do estator ou do rotor, e  $f_{\alpha\beta 0}$ , como a mesma grandeza vetorial  $f$ , representada no sistema de coordenadas bifásico  $\alpha\beta 0$ , no mesmo sistema referencial<sup>3</sup>, dadas por:

$$f_{abc} = \begin{bmatrix} f_a & f_b & f_c \end{bmatrix}' \quad (4.12)$$

$$f_{\alpha\beta 0} = \begin{bmatrix} f_\alpha & f_\beta & f_0 \end{bmatrix}'. \quad (4.13)$$

O efeito espacial da transformação pode ser observado na Figura 14.

---

<sup>3</sup>Note que com esta transformação as variáveis do estator e do rotor ainda não ficam referenciadas ao mesmo sistema de coordenadas. Isto é feito na Seção 4.4.

Pode-se notar ainda que esse sistema se caracteriza por possuir o eixo  $\beta$  adiantado em relação ao eixo  $\alpha$  (BARBI, 1985).

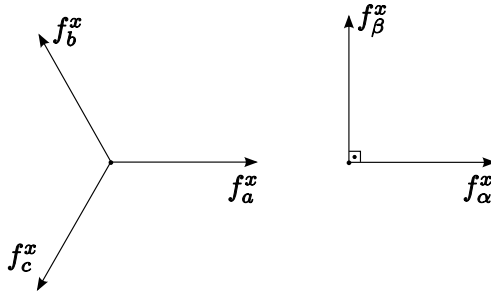


Figura 14: Transformação  $\alpha\beta 0$ .

A matriz  $K_{\alpha\beta 0}$ , que realiza a transformação de coordenadas trifásicas para coordenadas  $\alpha\beta 0$ , é dada pela Equação (4.14).

$$f_{\alpha\beta 0} = K_{\alpha\beta 0} f_{abc}, \quad (4.14)$$

onde

$$K_{\alpha\beta 0} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

A Equação (4.16) corresponde à transformação inversa de  $\alpha\beta 0$ , realizando a mudança do sistema de coordenadas bifásico para trifásico.

$$f_{abc} = K_{\alpha\beta 0}^{-1} f_{\alpha\beta 0}, \quad (4.16)$$

onde

$$K_{\alpha\beta 0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

A coordenada  $f_0$  é chamada de sequência zero e é nula em alimentações trifásicas balanceadas, como será considerado neste trabalho, portanto, por conveniência, as grandezas podem ser representadas apenas como  $f_{\alpha\beta}$ , ou seja, sem essa componente.



As duas primeiras linhas da matriz  $K_{\alpha\beta 0}$  em (4.15) são obtidas diretamente a partir da transformação planar de sistema trifásico para bifásico. A terceira linha é inserida de forma a possibilitar a inversão da matriz  $K_{\alpha\beta 0}$ , necessária ao equacionamento do motor. O termo constante  $2/3$  em (4.15) é definido de forma a assegurar uma transformação de amplitude constante (HAFFNER, 1998).

#### 4.4 Sistemas de Referência

O equacionamento do motor de indução pode ser escrito tomando-se por base três referenciais inerciais diferentes, que são denominados (HAFFNER, 1998):

- sistema de referência estacionário (todas as grandezas referenciadas ao eixo fixo do estator);
- sistema de referência móvel (todas as grandezas referenciadas ao eixo móvel do rotor);
- sistema de referência síncrono (todas as grandezas referenciadas ao campo girante do estator).

A mudança entre os sistemas de referência é realizada por intermédio da transformação de Park (BARBI, 1985). A transformação é composta por matrizes de mudança de base específicas para o estator e para o rotor.

##### 4.4.1 Transformação generalizada de Park

Sejam  $f_{dq0s}^x$  e  $f_{dq0r}^x$ , genericamente, as variáveis do estator e do rotor, em um sistema de referência arbitrário “x”, como por exemplo a corrente do estator,  $i_{dq0s}^x$ .

Como pode ser observado na Figura 15,  $\varphi_x$  é o ângulo formado entre as variáveis do estator,  $f_{dq0s}$ , e a representação das mesmas no sistema de coordenadas “x”, dada por  $f_{dq0s}^x$ . A diferença  $(\varphi_x - \varphi_r)$  é o ângulo formado entre as variáveis do rotor,  $f_{dq0r}$ , e sua representação  $f_{dq0r}^x$ .

Na Figura 15, são representados o eixo de coordenadas arbitrário “x”, o eixo do estator “s” e o eixo do rotor “r”, que se move com velocidade  $\omega_r$  em relação ao eixo do estator.

A transformação de Park é realizada no estator e no rotor, conforme as Equações (4.18) e (4.19), respectivamente, através das matrizes (4.20) e

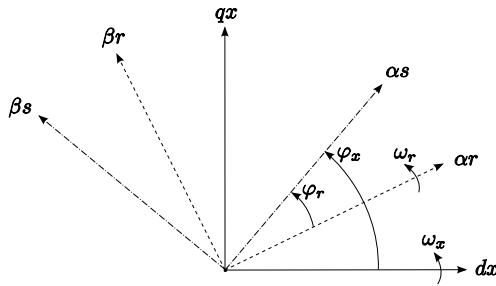


Figura 15: Transformação de Park para um sistema de referência arbitrário “x” aplicadas às variáveis do estator e do rotor.

(4.21).

$$f_{dq0s}^x = T_s^x f_{\alpha\beta 0s} \quad (4.18)$$

$$f_{dq0r}^x = T_r^x f_{\alpha\beta 0r} \quad (4.19)$$

$$T_s^x = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) & 0 \\ \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$T_r^x = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_x - \varphi_r) & -\sin(\varphi_x - \varphi_r) & 0 \\ \sin(\varphi_x - \varphi_r) & \cos(\varphi_x - \varphi_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

#### 4.4.2 Sistema de referência estacionário

O sistema de referência estacionário emprega o eixo do estator como referência. Os ângulos  $\varphi_x$  e  $(\varphi_x - \varphi_r)$  podem ser identificados através de comparação com a Figura 15, onde agora o eixo “x” se sobrepõe ao eixo “s”, e portanto,

$$\varphi_x = 0. \quad (4.22)$$

Utilizando (4.22) em (4.20) e (4.21), particularizamos a transformada de Park para este caso como:

$$f_{dq0s}^e = T_s^e f_{\alpha\beta 0s} \quad (4.23)$$

$$f_{dq0r}^e = T_r^e f_{\alpha\beta 0r}. \quad (4.24)$$

As matrizes  $T_s^e$  e  $T_r^e$  realizam a mudança de referencial das variáveis do estator e do rotor, respectivamente, para o sistema de referência estacionário. Como a transformada  $\alpha\beta 0$  colocava  $f_{\alpha\beta 0s}$  já referenciada ao estator, então  $T_s^e$  é uma matriz identidade e  $f_{dq0s}^e$  é igual à  $f_{\alpha\beta 0s}$ , como pode ser facilmente verificado através das Equações (4.18) e (4.20).

#### 4.4.3 Sistema de referência móvel

Neste caso, o sistema é referenciado ao rotor e  $\varphi_x$  é dado por:

$$\varphi_x = \varphi_r. \quad (4.25)$$

Utilizando (4.25) em (4.20) e (4.21), particularizamos a transformada de Park para este caso como:

$$f_{dq0s}^r = T_s^r f_{\alpha\beta 0s} \quad (4.26)$$

$$f_{dq0r}^r = T_r^r f_{\alpha\beta 0r}. \quad (4.27)$$

As matrizes  $T_s^r$  e  $T_r^r$  realizam a mudança de referencial das variáveis do estator e do rotor, respectivamente, para o sistema de referência móvel. Como a transformada  $\alpha\beta 0$  colocava  $f_{\alpha\beta 0r}$  já referenciada ao rotor, então  $T_r^r$  é uma matriz identidade e  $f_{dq0r}^r = f_{\alpha\beta 0r}$ , como pode ser facilmente verificado através das Equações (4.19) e (4.21).

#### 4.4.4 Sistema de referência síncrono

O sistema síncrono possui como referência a velocidade síncrona do campo girante do estator, representada por  $\omega_s$ . A posição instantânea ( $\varphi_s$ ) é obtida através da integração de  $\omega_s$ , ou seja,

$$\varphi_s = \int \omega_s dt. \quad (4.28)$$

Desta forma, observando-se a Figura 15, necessita-se fazer:

$$\varphi_x = \varphi_s. \quad (4.29)$$

Utilizando (4.29) em (4.20) e (4.21), particularizamos a transformada

de Park para este caso como:

$$f_{dq0s}^s = T_s^s f_{\alpha\beta 0s} \quad (4.30)$$

$$f_{dq0r}^s = T_r^s f_{\alpha\beta 0r}. \quad (4.31)$$

As matrizes  $T_s^s$  e  $T_r^s$  realizam a mudança de referencial das variáveis do estator e do rotor, respectivamente, para o sistema de referência síncrono.

## 4.5 Modelo da Máquina em Coordenadas Bifásicas

Nesta seção são apresentados os modelos da máquina de indução em coordenadas bifásicas para um sistema de referência genérico e para todos os tipos de sistemas de referência mostrados na Seção 4.4. A máquina é considerada um sistema trifásico equilibrado e, portanto, a componente 0 é ignorada.

Fisicamente, a máquina simétrica trifásica pode ser transformada em uma máquina simétrica bifásica equivalente com enrolamentos estatóricos fixos e enrolamentos rotóricos pseudo-estacionários. Esta máquina bifásica possui mesma potência mecânica, mesmo torque, mesma velocidade e mesmo números de pólos, que a máquina trifásica (KRAUSE; WASYN CZUK; SUDHOFF, 2002). Uma das maiores vantagens da representação bifásica é a diminuição do número de equações diferenciais do modelo.

### 4.5.1 Dinâmica elétrica

Primeiramente, podemos definir, por simplicidade

$$\kappa = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}, \quad (4.32)$$

onde  $L_s$  é a indutância do estator por fase,  $L_r$  é a indutância do rotor por fase e  $L_m$  é a indutância de magnetização por fase. aplicando a transformação (4.16) e as tranformações (4.18) e (4.19) em todas as variáveis de fluxo e tensão das equações (4.1) e (4.2), obtemos o modelo do motor de indução em coordenadas bifásicas e no referencial genérico  $x$  apresentado nas Equações

(4.33-4.36):

$$\dot{\phi}_{ds}^x = -\frac{R_s}{\kappa L_s} \phi_{ds}^x + \omega_x \phi_{qs}^x + \frac{R_s L_m}{\kappa L_s L_r} \phi_{dr}^x + V_{ds}^x \quad (4.33)$$

$$\dot{\phi}_{qs}^x = -\frac{R_s}{\kappa L_s} \phi_{qs}^x - \omega_x \phi_{ds}^x + \frac{R_s L_m}{\kappa L_s L_r} \phi_{qr}^x + V_{qs}^x \quad (4.34)$$

$$\dot{\phi}_{dr}^x = -\frac{R_r}{\kappa L_r} \phi_{dr}^x + \frac{R_r L_m}{\kappa L_s L_r} \phi_{ds}^x + (\omega_x - \omega_r) \phi_{qr}^x + V_{dr}^x \quad (4.35)$$

$$\dot{\phi}_{qr}^x = -\frac{R_r}{\kappa L_r} \phi_{qr}^x + \frac{R_r L_m}{\kappa L_s L_r} \phi_{qs}^x - (\omega_x - \omega_r) \phi_{dr}^x + V_{qr}^x. \quad (4.36)$$

A diferença entre as diversas possibilidades de eixos coordenados de referência está caracterizada no termo  $\omega_x$ , que varia para cada um dos sistemas de referência (FERREIRA, 2004).

O modelo da máquina de indução pode se apresentar como variáveis de estado os fluxos ou correntes ou uma mistura de ambos (denominado modelo corrente-fluxo) e a escolha de qual utilizar é normalmente baseada na sua finalidade (FERREIRA, 2004). O modelo de fluxos é usualmente aplicado para a estimação de variáveis necessárias ao controle, como o próprio fluxo e o conjugado (FERREIRA; HAFFNER; PEREIRA, 2000), enquanto o modelo de corrente-fluxo é comumente usado na simulação da máquina propriamente dita.

As correntes do estator podem ser obtidas a partir dos fluxos do rotor utilizando as seguintes expressões:

$$i_{ds}^x = \frac{1}{\kappa L_s} \left( \phi_{ds}^x - \frac{L_m}{L_r} \phi_{dr}^x \right) \quad (4.37)$$

$$i_{qs}^x = \frac{1}{\kappa L_s} \left( \phi_{qs}^x - \frac{L_m}{L_r} \phi_{qr}^x \right). \quad (4.38)$$

De forma semelhante, para determinar o valor das correntes do rotor, podem ser empregadas as seguintes equações:

$$i_{dr}^x = \frac{1}{L_r} (\phi_{dr}^x - L_m i_{ds}^x) \quad (4.39)$$

$$i_{qr}^x = \frac{1}{L_r} (\phi_{qr}^x - L_m i_{qs}^x). \quad (4.40)$$

Substituindo (4.37) e (4.38) nas equações de estado (4.33-4.36), obtemos o modelo corrente-fluxo mostrado nas Equações (4.41-4.44), que será o

modelo utilizado a partir deste ponto.

$$\dot{i}_{ds}^x = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{ds}^x + \omega_x i_{qs}^x + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{dr}^x + \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{qr}^x + \frac{1}{\kappa L_s} V_{ds}^x \quad (4.41)$$

$$\dot{i}_{qs}^x = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{qs}^x - \omega_x i_{ds}^x + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{qr}^x - \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{dr}^x + \frac{1}{\kappa L_s} V_{qs}^x \quad (4.42)$$

$$\dot{\phi}_{dr}^x = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{ds}^x - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr}^x + (\omega_x - \omega_r) \phi_{qr}^x + V_{dr}^x \quad (4.43)$$

$$\dot{\phi}_{qr}^x = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{qs}^x - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr}^x - (\omega_x - \omega_r) \phi_{dr}^x + V_{qr}^x \quad (4.44)$$

#### 4.5.2 Dinâmica mecânica

A dinâmica do movimento do rotor em coordenadas bifásicas possui diferença do caso trifásico apenas na definição do conjugado elétrico. Entretanto, como na definição apresentada para a dinâmica elétrica na Seção 4.5.1 é utilizada a velocidade elétrica  $\omega_r$  ao invés da velocidade mecânica  $\omega_r$ , é possível apresentar a dinâmica mecânica em função de  $\omega_r$  substituindo (4.9) em (4.8). Assim,

$$\dot{\omega}_r = -\frac{B_m}{J_m} \omega_r + \frac{p}{J_m} (\tau_e - \tau_c), \quad (4.45)$$

onde

$$\tau_e = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\phi_{dr}^x i_{qs}^x - \phi_{qr}^x i_{ds}^x). \quad (4.46)$$

#### 4.5.3 Modelo em sistema de coordenadas estacionário

Este modelo tem as variáveis de estado senoidais em regime permanente e pode ser obtido fazendo-se  $\omega_x = 0$  nas Equações (4.41-4.44). Com

isso o modelo em coordenadas estacionárias pode ser escrito como

$$\dot{i}_{ds}^e = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{ds}^e + i_{qs}^e + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{dr}^e + \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{qr}^e + \frac{1}{\kappa L_s} V_{ds}^e \quad (4.47)$$

$$\dot{i}_{qs}^e = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{qs}^e - i_{ds}^e + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{qr}^e - \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{dr}^e + \frac{1}{\kappa L_s} V_{qs}^e \quad (4.48)$$

$$\dot{\phi}_{dr}^e = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{ds}^e - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr}^e - \omega_r \phi_{qr}^e + V_{dr}^e \quad (4.49)$$

$$\dot{\phi}_{qr}^e = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{qs}^e - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr}^e + \omega_r \phi_{dr}^e + V_{qr}^e \quad (4.50)$$

$$\dot{\omega}_r = -\frac{B_m}{J_m} \omega_r + \frac{3}{2} p^2 \frac{L_m}{J_m L_r} (\phi_{dr}^e i_{qs}^e - \phi_{qr}^e i_{ds}^e) - \frac{p}{J_m} \tau_c \quad (4.51)$$

#### 4.5.4 Modelo em sistema de coordenadas móvel

O modelo da máquina no sistema de coordenadas fixo ao rotor tem variáveis de estado senoidais em regime permanente, exceto quando o rotor possui velocidade angular igual à velocidade do campo girante da máquina, e pode ser escrito substituindo-se  $\omega_x = \omega_r$  nas Equações (4.41-4.44), como

$$\dot{i}_{ds}^r = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{ds}^r + \omega_r i_{qs}^r + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{dr}^r + \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{qr}^r + \frac{1}{\kappa L_s} V_{ds}^r \quad (4.52)$$

$$\dot{i}_{qs}^r = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{qs}^r - \omega_r i_{ds}^r + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{qr}^r - \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{dr}^r + \frac{1}{\kappa L_s} V_{qs}^r \quad (4.53)$$

$$\dot{\phi}_{dr}^r = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{ds}^r - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr}^r + V_{dr}^r \quad (4.54)$$

$$\dot{\phi}_{qr}^r = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{qs}^r - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr}^r + V_{qr}^r \quad (4.55)$$

$$\dot{\omega}_r = -\frac{B_m}{J_m} \omega_r + \frac{3}{2} p^2 \frac{L_m}{J_m L_r} (\phi_{dr}^r i_{qs}^r - \phi_{qr}^r i_{ds}^r) - \frac{p}{J_m} \tau_c \quad (4.56)$$

#### 4.5.5 Modelo em sistema de coordenadas síncrono

O modelo representado em coordenadas síncronas tem as variáveis de estado constantes em regime permanente, pois o sistema de coordenadas gira com a velocidade angular igual a do campo girante do estator ( $\omega_s$ ). Devido à essa característica, este será o modelo utilizado na formulação da técnica de chaveamento proposta no Capítulo 3 e nas simulações. Portanto, fazendo  $\omega_x = \omega_s$  nas Equações (4.41-4.44), obtemos o modelo síncrono:

$$\dot{i}_{ds}^s = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{ds}^s + \omega_s i_{qs}^s + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{dr}^s + \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{qr}^s + \frac{1}{\kappa L_s} V_{ds}^s \quad (4.57)$$

$$\dot{i}_{qs}^s = -\frac{1}{\kappa L_s} \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_{qs}^s - \omega_s i_{ds}^s + \frac{L_m R_r}{\kappa L_s L_r^2} \phi_{qr}^s - \frac{L_m}{\kappa L_s L_r} \omega_r \phi_{dr}^s + \frac{1}{\kappa L_s} V_{qs}^s \quad (4.58)$$

$$\dot{\phi}_{dr}^s = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{ds}^s - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr}^s + (\omega_s - \omega_r) \phi_{qr}^s + V_{dr}^s \quad (4.59)$$

$$\dot{\phi}_{qr}^s = \frac{L_m R_r}{L_r} i_{qs}^s - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr}^s - (\omega_s - \omega_r) \phi_{dr}^s + V_{qr}^s \quad (4.60)$$

$$\dot{\omega}_r = -\frac{B_m}{J_m} \omega_r + \frac{3}{2} p^2 \frac{L_m}{J_m L_r} (\phi_{dr}^s i_{qs}^s - \phi_{qr}^s i_{ds}^s) - \frac{p}{J_m} \tau_c \quad (4.61)$$

#### 4.6 Acionamento

As máquinas de indução trifásicas, como é o caso do sistema em estudo, podem ser conectados à rede conforme a tensão de linha (ligação em triângulo) ou a tensão de fase da rede (ligação em estrela). Entretanto, com o propósito de controle, o acionamento pode ser realizado através de inversores com fonte de corrente (CSI)<sup>4</sup> ou de tensão (VSI)<sup>5</sup>. Atualmente, o componente mais utilizado como chave é o transistor bipolar de porta isolada (IGBT)<sup>6</sup>.

Uma representação esquemática do inversor de tensão, que está sendo considerado no decorrer deste trabalho, com carga conectada em estrela, é apresentada na Figura 18. A tensão em corrente contínua (CC), representada por  $V_{cc}$ , comumente provém de uma malha de retificação da tensão em

<sup>4</sup>Do inglês *Current Source Inverter*.

<sup>5</sup>Do inglês, *Voltage Source Inverter*.

<sup>6</sup>Do inglês, *Insulated Gate Bipolar Transistor*.



corrente alternada (CA) da rede elétrica externa.

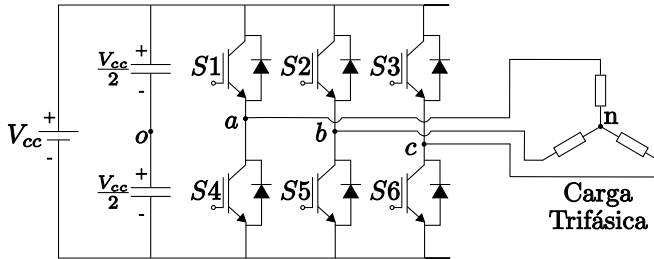


Figura 16: Diagrama esquemático do inversor de tensão trifásico.

No caso de uma carga com neutro ( $n$ ) conectado ao ponto central do link CC (ponto  $o$ ), as tensões de fase da carga  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$ , e  $V_{cn}$ , são as próprias tensões  $V_{ao}$ ,  $V_{bo}$ , e  $V_{co}$ , de saída do inversor. Entretanto, quando a carga é uma máquina de indução, usualmente não é possível a conexão do terminal neutro (BOSE, 2002), então podemos escrever as seguintes relações:

$$V_{ao} = V_{an} + V_{on} \quad (4.62)$$

$$V_{bo} = V_{bn} + V_{on} \quad (4.63)$$

$$V_{co} = V_{cn} + V_{on}. \quad (4.64)$$

Levando em consideração que as tensões de carga são balanceadas, ou seja,  $V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$ , adicionando estas três equações obtém-se

$$V_{on} = \frac{1}{3} (V_{ao} + V_{bo} + V_{co}). \quad (4.65)$$

Além do mais, substituindo (4.65) em (4.62), (4.63), e (4.64), respectivamente, obtém-se a seguinte representação matricial da relação entre as tensões de fase da carga e as tensões de saída do inversor

$$\begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ao} \\ V_{bo} \\ V_{co} \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Existem várias estratégias de chaveamento para o inversor de tensão. A Seção 4.6.1 a seguir apresenta resumidamente a operação utilizando PWM

baseado em portadora (CB-PWM)<sup>7</sup>, apenas com o objetivo de ilustração do funcionamento do inversor. Mais detalhes sobre a operação do inversor podem ser encontrados em (BARBI; MARTINS, 2005), (ANAYA-LARA et al., 2009) e (HOLTZ, 1992).

#### 4.6.1 Inversor de tensão com PWM baseado em portadora

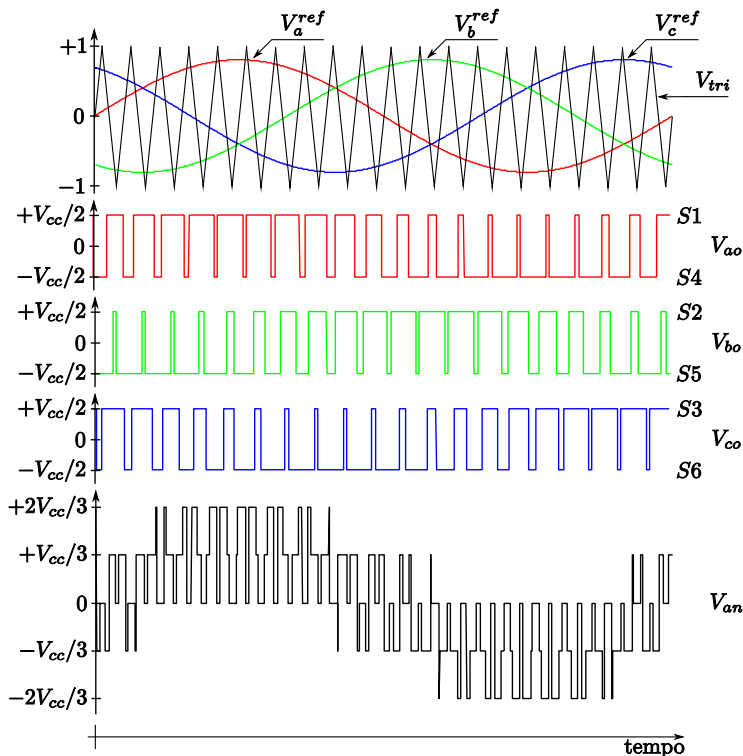


Figura 17: Formas de onda do inversor de tensão com CB-PWM.

Este é o PWM clássico onde um sinal de referência,  $V^{ref}$ , que varia senoidalmente, é comparado com uma onda portadora de forma triangular com frequência fixa,  $V_{tri}$ , para criar o padrão de chaveamento (posição das

<sup>7</sup>Do inglês, *Carrier-Based PWM*.

chaves  $S1, \dots, S7$ ). Considerando o inversor trifásico da Figura 18 com as formas de onda de referência para cada fase,  $V_a^{ref}$ ,  $V_b^{ref}$  e  $V_c^{ref}$ , mostradas na Figura 17, então  $S1$  tem estado “fechado” quando  $V_a^{ref} > V_{tri}$ .  $S4$  tem estado “fechado” quando  $V_a^{ref} < V_{tri}$ . Em geral:

$$S1 = \begin{cases} 1 & V_a^{ref} > V_{tri} \\ 0 & V_a^{ref} < V_{tri} \end{cases} \quad (4.67)$$

$$S4 = \begin{cases} 1 & V_a^{ref} < V_{tri} \\ 0 & V_a^{ref} > V_{tri} \end{cases}, \quad (4.68)$$

onde “1” denota a chave no estado “fechado” e “0” no estado “aberto”.

Nas fases  $b$  e  $c$ , as chaves  $S2$  e  $S3$  seguem a mesma lógica que  $S1$ , e as chaves  $S5$  e  $S6$  seguem a mesma lógica que  $S4$ . Podemos notar em (4.67), que  $S1$  e  $S4$  são complementares, assim como  $S2$  com  $S5$  e  $S3$  com  $S6$ .

Sempre que uma chave comandada do grupo positivo ( $S1$ ,  $S2$  e  $S3$ ) estiver em condução, a tensão de saída da fase correspondente à essa chave será  $+V_{cc}/2$  em relação à referência  $o$ . E sempre que uma chave comandada do grupo negativo ( $S4$ ,  $S5$  e  $S6$ ) estiver em condução, a tensão de saída da fase correspondente à essa chave será  $-V_{cc}/2$  em relação à referência  $o$ .

Na Figura 17,  $V_{ao}$ ,  $V_{bo}$  e  $V_{co}$  são os valores das saídas do inversor e  $V_{an}$  é a tensão de fase aplicada em uma carga trifásica balanceada conectada em estrela com neutro não conectado e é obtida a partir de (4.66). Por conveniência, as formas de onda de  $V_{bn}$  e  $V_{cn}$  foram omitidas, mas possuem formato semelhante com defasagem de  $120^\circ$  e  $240^\circ$ , respectivamente.

## 4.7 Modelo da Comutação

O modelo do motor de indução apresentado anteriormente possui como entrada as tensões no estator e/ou do rotor. Essas tensões possuem valores constantes para cada uma das seqüências de operação do inversor. Assim podemos dizer que, para cada configuração das chaves do inversor, existe um modelo para o sistema.

Recordando que as chaves  $S1, \dots, S6$  de um mesmo ramo da Figura 18 são complementares, o modelo comutado do inversor de tensão pode ser simplificado de forma que exista somente uma chave por ramo, como representado na Figura 18.

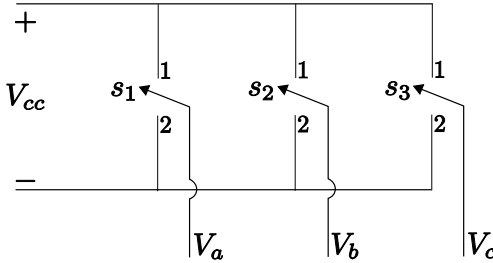


Figura 18: Modelo da comutação do inversor.

No modelo simplificado do inversor a relação entre as tensões<sup>8</sup> de fase da máquina  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$  e as tensões de saída do inversor  $U_j$ , provenientes de cada chave  $s_j$ , é expressa por:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}_i = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}_i, \quad (4.69)$$

onde o sub-índice  $i$  denota a dependência dos vetores com relação ao modo de operação, e

$$U_j = V_{cc} u_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.70)$$

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{chave } s_j \text{ na posição 1} \\ 0 & \text{chave } s_j \text{ na posição 2} \end{cases}. \quad (4.71)$$

Note que as chaves  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , da Figura 18, comutam entre duas posições diferentes cada (não mais as posições “aberta” e “fechada” como em  $S1, \dots, S6$ ), e com isso tem-se  $2^3$  modos possíveis. Todos os modos de operação estão relacionados na Tabela 2.

Calculando as tensões de fase em (4.69) para os modos 7 e 8, também conhecidos por modos de operação “roda livre”, obtém-se  $V_a = V_b = V_c = 0$  e pode-se concluir que estes modos são redundantes entre si.

<sup>8</sup>Estas tensões são entre a fase e o neutro  $n$ , como visto na Figura 18. Por conveniência, o sub-índice  $n$  será omitido a partir deste ponto.

Modo i	$u_1$	$u_2$	$u_3$
1	1	0	0
2	1	1	0
3	0	1	0
4	0	1	1
5	0	0	1
6	1	0	1
7	1	1	1
8	0	0	0

Tabela 2: Definição da posição das chaves do inversor em todos os modos possíveis.

4.8 Topologias Usuais do Sistema Inversor-Máquina

Esta seção tem como objetivo ilustrar algumas das diversas topologias de conexão dos elementos do sistema inversor-máquina tanto para operação desta como motor quanto gerador.

A topologia mais usual de conexão utilizada no acionamento e controle do motor de indução com rotor é mostrada na Figura 19.

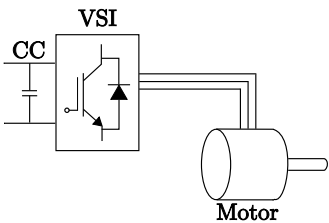


Figura 19: Configuração comum para motores de indução com rotor em gaiola.

Esta topologia é utilizada para motor de indução com rotor em gaiola. Este tipo de rotor possui as vantagens de não necessitar de anéis coletores (componentes caros e sensíveis), o que o permite operar em ambientes mais agressivos, e também sua construção é muito mais simples e rápida. A diferença principal para o motor com rotor bobinado é que neste o rotor é usualmente conectado à um reostato de partida (COTRIM, 1992). Este é inserido para aumentar a resistência rotórica e assim aumentar o torque de partida, re-

sultado em uma partida mais suave. Dada a partida, retiram-se as resistências e se coloca o rotor em curto-circuito.

As principais configurações de conexão para os geradores de indução e inversores utilizadas em turbinas de vento também podem ser divididas nos dois tipos: com rotor em gaiola e rotor bobinado. Topologias de outros tipos de máquinas utilizadas na geração eólica, além da máquina de indução, podem ser encontradas com mais detalhes em (MARQUES et al., 2003).

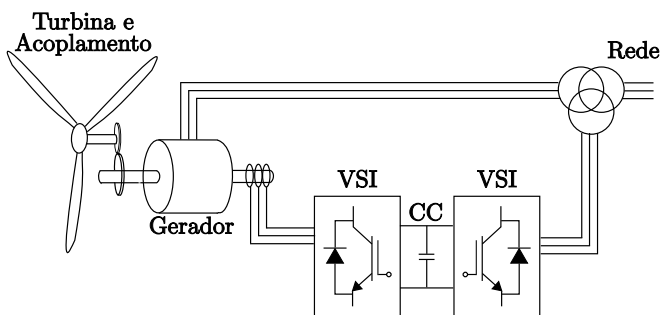


Figura 20: Configuração comum para o DFIG usual.

O sistema de geração eólica mostrado na Figura 20 consiste de um gerador de indução de dupla excitação (DFIG), onde o estator é diretamente conectado à rede e o rotor é conectado à rede através de um conversor *back-to-back*, composto de dois VSIs. Normalmente, o VSI do lado do rotor regula o torque eletromagnético e fornece parte da potência reativa para manter a magnetização da máquina. Por outro lado, o VSI do lado da rede elétrica regula a tensão do *link* CC (MARQUES et al., 2003).

O sistema da Figura 21 mostra um DFIG totalmente controlado, com a transmissão feita a partir do *link* CC. Este tipo de sistema permite o controle das tensões e frequências do rotor e do estator, disponibilizando uma flexibilidade no controle maior que o DFIG convencional da Figura 20. Além disso, com a transmissão em CC, é considerado melhor para grandes distâncias, como na instalação de turbinas em mar aberto com ligação à terra firme por meio de cabos submarinos (HOFMANN; OKAFOR, 2001). Como desvantagem, sua estrutura de conversor é mais complexa e sua tecnologia é recente, e portanto menos amadurecida.

O outro tipo de sistema, chamado de gerador de indução com rotor em

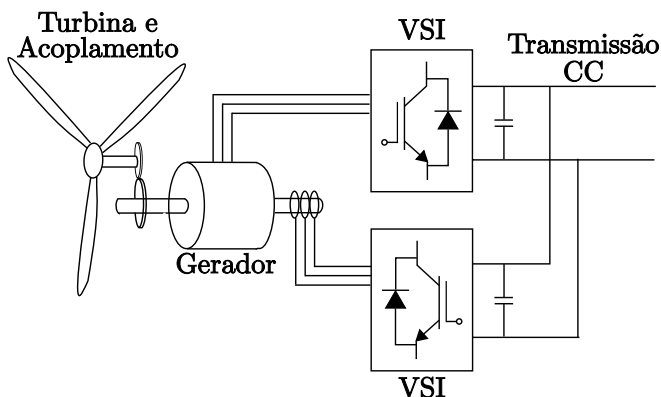


Figura 21: Configuração comum para o DFIG totalmente controlado.

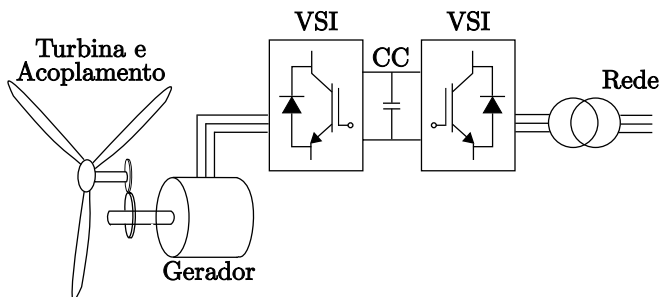


Figura 22: Configuração comum para o SCIG.

gaiola (SCIG)<sup>9</sup>, é mostrado na Figura 22. Neste esquema, o estator é conectado à rede através de dois VSIs interconectados por um *link* CC. O sistema de controle do VSI do lado do estator regula o torque eletromagnético e supre a potência reativa para manter a máquina magnetizada, enquanto o do outro lado regula as potências ativas e reativas entregues à rede e regulam a tensão do *link* CC. Suas principais vantagens são as mesmas apresentadas para o caso do motor com rotor em gaiola. Como desvantagens, podem ser citadas a maior complexidade da técnica de controle, cuja performance depende do bom conhecimento dos parâmetros da máquina que variam de acordo com a temperatura e frequência, e do dimensionamento de um conversor back-to-

<sup>9</sup>Do inglês, *Squirrel Cage Induction Generator*

back que suporte uma maior potência, pois este, além de servir de caminho para a potência gerada, deve suprir a magnetização da máquina (MARQUES et al., 2003).

#### 4.9 Considerações Finais do Capítulo

Este capítulo apresentou a modelagem trifásica da máquina de indução de forma genérica, com rotor bobinado ou rotor em gaiola, e em seguida foram apresentados modelos bifásicos e as respectivas transformações de coordenadas envolvidas. Dentre os modelos bifásicos, o mais interessante para a formulação que será apresentada no Capítulo 3 é o síncrono, pois este possui as variáveis de estado constantes em regime permanente, o que facilita a caracterização de pontos de equilíbrio do sistema.

Foi apresentado também a modelagem matemática do inversor de tensão, e como este tem variáveis trifásicas, percebe-se a importância de se conhecer as transformações entre coordenadas trifásicas e bifásicas, além do fato de estas simplificarem o conjunto de equações da máquina. Isso porque o sistema completo a ser controlado é dado pelo conjunto inversor-máquina (trifásico-bifásico, respectivamente).

No fim do capítulo foram apresentadas algumas topologias possíveis para o sistema inversor-máquina. Com isso, é possível perceber uma dificuldade adicional para a formulação de leis de chaveamento para a máquina de indução operando como gerador. Isso se deve principalmente ao fato de serem utilizados normalmente dois inversores de tensão e ter conexão à rede que também precisa ser modelada. A modelagem da rede pode ser simplificada aproximando-a como uma impedância altamente indutiva em série com uma fonte trifásica ideal, como é feito em (TARNOWSKI, 2006). Outra diferença é a necessidade de modelagem da turbina eólica, que pode ser encontrada em (TARNOWSKI; REGINATTO, 2007) e (LEI et al., 2006), e a dificuldade de que algumas variáveis controladas no caso do gerador apresentam relações intrínsecas entre si.

Outro ponto a ser observado no modelo do sistema é o grande número de não linearidades. Mesmo para a máquina em coordenadas bifásicas síncronas das Equações (4.57-4.61), percebe-se várias bilinearidades, como a multiplicação entre variáveis de estado e entre estas e a variável  $\omega_s$ , que por sua vez pode ser dependente dos estados também, de acordo com a técnica de controle utilizada, como é o caso da formulação que será vista no Capítulo 5. Além do mais, a utilização do inversor acrescenta a característica de variação estrutural ao modelo, o que pode ser visto como outro tipo de não linearidade.



## 5 PROPOSTA DE FORMULAÇÃO DE CHAVEAMENTO PARA SISTEMAS INVERSOR-MÁQUINA

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma proposta de formulação da técnica de chaveamento descrita no Capítulo 3 para aplicação nos sistemas inversor-máquina, mostrados no Capítulo 4. Um caso particular de máquina é tratado: o motor de indução com rotor em gaiola com modelo em coordenadas bifásicas síncronas.

Primeiramente é apresentada uma maneira particular de se representar todas as dinâmicas existentes no sistema. Com o objetivo de seguimento de referências, o erro do sistema é considerado. Por fim são apresentadas as LMIs de chaveamento, incluindo condições de modos deslizantes estáveis, a maneira de resolução das LMIs e a estrutura de controle.

Vale ressaltar desde já que para este caso ainda não foi encontrada uma solução para o problema e, portanto, mais estudos a partir do que será apresentado são necessários.

### 5.2 Modelo utilizado do sistema

A formulação da técnica de chaveamento para a máquina de indução será baseada no modelo bifásico em coordenadas síncronas, apresentado na Seção 4.5.5. Esta escolha é motivada pelo fato de este modelo possuir as variáveis de estado constantes em regime permanente, o que viabiliza a formulação em LMI que será apresentada na sequência. Como o projeto será feito para uma máquina com rotor em gaiola, as tensões do rotor serão desconsideradas, pois neste caso  $V_{dr}^s = V_{qr}^s = 0$ .

Para simplificar a apresentação, podemos redefinir o vetor de variáveis de estado da máquina como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}' \triangleq \begin{bmatrix} i_{ds}^s & i_{qs}^s & \phi_{dr}^s & \phi_{qr}^s & \omega_r \end{bmatrix}', \quad (5.1)$$

e as seguintes constantes<sup>1</sup> da máquina:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\kappa L_s}, & a_1 &= a_0 \left( \frac{L_m^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right), & a_2 &= a_0 \frac{L_m R_r}{L_r^2}, \\
 a_3 &= a_0 \frac{L_m}{L_r}, & a_4 &= \frac{R_r}{L_r}, & a_5 &= \frac{L_m R_r}{L_r}, \\
 a_6 &= \frac{B_m}{J_m}, & a_7 &= \frac{p}{J_m}, & a_8 &= a_7 \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Com isso, podemos escrever o modelo da máquina apresentado nas Equações (4.57-4.61), como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + \omega_s x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_5 x_4 + a_0 V_{ds}^s \\
 \dot{x}_2 &= -\omega_s x_1 - a_1 x_2 - a_3 x_5 x_3 + a_2 x_4 + a_0 V_{qs}^s \\
 \dot{x}_3 &= a_5 x_1 - a_4 x_3 + (\omega_s - x_5) x_4 \\
 \dot{x}_4 &= a_5 x_2 - (\omega_s - x_5) x_3 - a_4 x_4 \\
 \dot{x}_5 &= a_8 x_2 x_3 - a_8 x_1 x_4 - a_6 x_5 - a_7 \tau_c,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

que pode ser reescrito na representação de espaços de estados, evitando deixar os fluxos ( $x_3$  e  $x_4$ , normalmente não mensuráveis para este tipo de máquina) na matriz de dinâmica para não necessitar de considerá-los em um politopo, como:

$$\dot{x} = A(x, \omega_s) x + B V_{dq}^s + T_c, \tag{5.4}$$

onde

$$A(x, \omega_s) = \begin{bmatrix} -a_1 & \omega_s & a_2 & a_3 x_5 & 0 \\ -\omega_s & -a_1 & -a_3 x_5 & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & -a_4 & \omega_s - x_5 & 0 \\ 0 & a_5 & -(\omega_s - x_5) & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 x_2 & -a_8 x_1 & -a_6 \end{bmatrix},$$

---

<sup>1</sup>Supostas constantes aqui, entretanto podem variar em função do desgaste, da saturação, da temperatura e da frequência de operação da máquina (TOLİYAT; LEVI; RAINA, 2003).

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_{dqs}^s = \begin{bmatrix} V_{ds}^s \\ V_{qs}^s \end{bmatrix}, \quad T_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_7 \tau_c \end{bmatrix}.$$

### 5.3 Transformações entre inversor e máquina

A partir do modelo definido na Seção 5.2, temos que as tensões de entrada da máquina estão representadas no sistema bifásico com referencial síncrono e na Seção 4.7 é apresentado o modelo comutado do inversor, que tem a tensão de saída trifásica. Por isso, é necessário incluir na formulação as transformações  $\alpha\beta 0$  e de Park para referencial síncrono, como indicado na Figura 23.

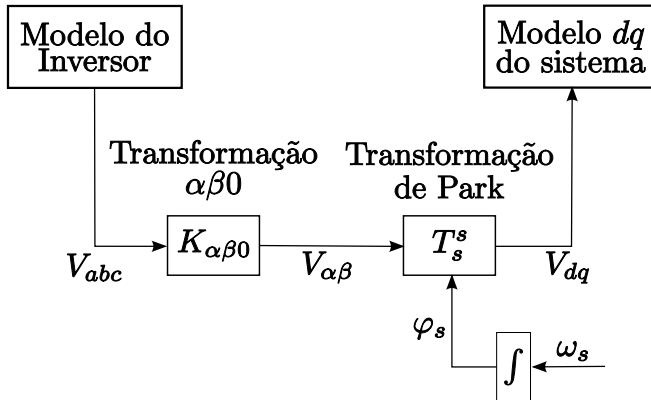


Figura 23: Transformações requeridas para as tensões de fase entre inversor e máquina.

As tensões de alimentação da máquina (ou de saída do inversor) podem ser expressas em coordenadas  $\alpha\beta 0$  aplicando (4.14). Como a máquina está sendo considerada um sistema trifásico equilibrado, a componente 0 é ignorada, resultando em

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha si} \\ V_{\beta si} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{as} \\ V_{bs} \\ V_{cs} \end{bmatrix}_i, \quad (5.5)$$

que pode ser reescrita em função das posições das chaves, como mostrado na Seção 4.7, substituindo (4.69) em (5.5):

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha si} \\ V_{\beta si} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} V_{cc} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_i. \quad (5.6)$$

A transformação de Park é dada por (4.30), com a seguinte matriz de transformação  $T_s^s$  (desconsiderando a componente 0):

$$T_s^s = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_s) & -\sin(\varphi_s) \\ \sin(\varphi_s) & \cos(\varphi_s) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Por conta das propriedades de convexidade necessárias à formulação LMI do problema, definimos as variáveis auxiliares

$$z_1 = \sin(\varphi_s) \quad (5.8)$$

$$z_2 = \cos(\varphi_s), \quad (5.9)$$

e então o bloco da transformação de Park da Figura 23 pode ser descrito, a partir de (4.30), como

$$\begin{bmatrix} V_{dsi}^s \\ V_{qsi}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 & z_1 \\ -z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha si} \\ V_{\beta si} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

e, após algumas manipulações algébricas, é possível reescrever (5.10) como (5.11), de modo a isolar  $z_1$  e  $z_2$  no vetor  $z$ , colocando  $V_{\alpha si}$  e  $V_{\beta si}$  na matriz  $V_i$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{dsi}^s \\ V_{qsi}^s \end{bmatrix}}_{V_{dqi}^s} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{\beta si} & V_{\alpha si} \\ -V_{\alpha si} & V_{\beta si} \end{bmatrix}}_{V_i} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_z. \quad (5.11)$$

Deste ponto em diante,  $V_i$ ,  $i \in \mathcal{M}$  concentra toda a informação que difere para cada modo.

Notando-se ainda que

$$\dot{\sin}(\varphi_s) = \dot{\varphi}_s \cos(\varphi_s) \quad (5.12)$$

$$\dot{\cos}(\varphi_s) = -\dot{\varphi}_s \sin(\varphi_s), \quad (5.13)$$

a dinâmica do vetor  $z$  é dada por

$$\dot{z} = W(\omega_s)z, \quad (5.14)$$

onde

$$W(\omega_s) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_s \\ -\omega_s & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Um último ponto importante à respeito das variáveis em  $z$  é que, devido à sua definição de estrutura em (5.8), a seguinte restrição básica da geometria sempre é satisfeita

$$z_1^2 + z_2^2 = 1 \quad \forall \varphi_s. \quad (5.16)$$

## 5.4 Determinação da frequência síncrona

As formas de onda das tensões de entrada requeridas ao controle possuem duas propriedades fundamentais: amplitude e frequência. A geração da amplitude é dada pelo chaveamento do inversor, como apresentado na Seção 5.3 e a frequência dessas tensões é incorporada através da transformação de Park, como visto na Figura 23. Como o modelo considerado está no referencial síncrono, é necessário determinar o valor da frequência síncrona  $\omega_s$ .

Baseado na técnica de controle escalar usual com escorregamento controlado (FITZGERALD C. KINGSLEY, 2006), a frequência síncrona  $\omega_s$  será determinada a partir da adição entre a velocidade elétrica do rotor  $x_5$  e a frequência de escorregamento estimada  $\hat{\omega}_{sl}$ , ou seja,

$$\omega_s = x_5 + \hat{\omega}_{sl}, \quad (5.17)$$

e a razão desta escolha é que qualquer variação na carga  $\tau_c$  introduzirá um erro em  $\omega_r$ . Quando  $\omega_r$  ( $x_5$ ) é adicionada à  $\hat{\omega}_{sl}$  (que ficou com seu valor incorreto após a variação) para a obtenção da velocidade do campo girante, seus erros se anulam e obtém-se o valor correto de  $\omega_s$  (JACOBINA et al., 2003).

A diferença com o trabalho apresentado em (JACOBINA et al., 2003) está na frequência de escorregamento, que será estimada neste caso a partir de uma dinâmica Proporcional-Integral (PI) para o erro de velocidade, forma comumente encontrada na literatura e não baseada em controle adaptativo como em (JACOBINA et al., 2003). Será considerada aqui uma dinâmica integral

com ganho ajustável  $g_I$ , escrita como:

$$\dot{\hat{\omega}}_{sl} = g_I (\bar{x}_5 - x_5), \quad (5.18)$$

onde  $\bar{x}_5$  representa a referência desejada para a velocidade no equilíbrio.

### 5.5 Erro do sistema aumentado para equilíbrios conhecidos

Nas Seções 5.2, 5.3 e 5.4, foram apresentadas as dinâmicas referentes ao motor de indução, às transformações de coordenadas envolvidas e à geração da frequência síncrona. Juntas, essas dinâmicas formam a representação completa do conjunto acionamento-sistema, então podemos escrever o estado aumentado completo como:

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \hat{\omega}_{sl} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Devido à escolha das variáveis de estado  $x$  como em (5.1), pode ser visto que o ponto de equilíbrio  $x$  igual a 0 representa a máquina parada. Por este motivo, a formulação apresentada nesta seção tem como objetivo o seguimento de referência dos estados com relação à um valor constante desejado, considerado conhecido<sup>2</sup>,  $\bar{x}_a$ . Este equilíbrio de referência é dado por

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \\ \bar{\omega}_{sl} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

onde  $\bar{x}$  são valores de equilíbrio desejados (escolhidos) para os estados do motor, e  $\bar{\omega}_{sl}$  é consequência dos valores de equilíbrio de  $x_5$  e  $\omega_s$  na Equação (5.17).

O termo  $\bar{z}$  pode ser encontrado substituindo os valores de equilíbrio das tensões  $V_{dqs}^s$  na Equação (5.11), como mostrado na Equação (5.21) a seguir. Como em equilíbrio os valores de  $V_{dqs}^s$  são constantes, mesmo havendo chaveamento, o índice  $i$  pode ser ignorado.

$$\bar{z} = V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s. \quad (5.21)$$

Portanto, o vetor de erro de seguimento de referência para o sistema

---

<sup>2</sup>Essa suposição é válida enquanto  $\tau_c$  tiver valor fixo.

aumentado pode ser escrito como

$$e_a = x_a - \bar{x}_a, \quad (5.22)$$

onde

$$e_a = \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \\ e_w \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

e então, a partir das Equações (5.19) e (5.20), os erros de cada subsistema são

$$e_x = x - \bar{x} \quad (5.24)$$

$$e_z = z - V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s \quad (5.25)$$

$$e_w = \hat{\omega}_{sl} - \bar{\omega}_{sl}. \quad (5.26)$$

Note que  $z$  são senoidais. Em regime permanente, é esperado que o chaveamento do termo  $(V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s)$  aproxime-se de uma forma senoidal.

A dinâmica do erro aumentado é dada pelas dinâmicas (5.4), (5.14) e (5.18), de cada subsistema, ou seja,

$$\dot{e}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\hat{\omega}}_{sl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x, \omega_s)x + B V_{dqi}^s + T_c \\ W(\omega_s)z \\ g_I(\bar{x}_5 - x_5) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

O termo  $V_{dqi}^s$  agora está representado com o índice  $i$ , pois da Seção 5.3 sabemos que a tensão de entrada será proveniente de um elemento chaveado, e pode ser reescrito usando a Equação (5.11). Então,

$$\dot{e}_a = \begin{bmatrix} A(x, \omega_s)x + B V_i z + T_c \\ W(\omega_s)z \\ g_I(\bar{x}_5 - x_5) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Como os estados considerados agora são os do vetor  $e_a$ , o sistema deve ser todo reescrito em função destes. Considere, então, as matrizes auxiliares  $C_j$ , tais que

$$C_j x = x_j \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \quad (5.29)$$

Com isso, podemos reescrever  $\dot{e}_a$  substituindo os elementos de  $x_a$  por  $e_a$  usando a Equação (5.24), e para o caso de  $\omega_s$  usando também a Equação

(5.17). Portanto,

$$\dot{e}_a = \begin{bmatrix} A(e_x, e_w) \cdot (e_x + \bar{x}) + B V_i e_z + B \bar{V}_{dqs}^s + T_c \\ W(e_x, e_w) e_z + W(e_x, e_w) V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s \\ -g_I C_5 e_x \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

onde

$$A(e_x, e_w) = A(x, \omega_s) \Big|_{x=e_x+\bar{x}, \omega_s=C_5 e_x+C_5 \bar{x}+e_w+\hat{\omega}_{sl}} \quad (5.31)$$

$$W(e_x, e_w) = W(\omega_s) \Big|_{\omega_s=C_5 e_x+C_5 \bar{x}+e_w+\hat{\omega}_{sl}}. \quad (5.32)$$

Observando que  $A(e_x, e_w)$  e  $W(e_x, e_w)$  são afins no erro, podemos separar as componentes<sup>3</sup> usando a seguinte notação:

$$A(e_x, e_w) = \tilde{A}_1 e_x + \tilde{A}_2 e_w + \bar{A} \quad (5.33)$$

$$W(e_x, e_w) = \tilde{W}_1 e_x + \tilde{W}_2 e_w + \bar{W}. \quad (5.34)$$

A partir disso podemos reescrever  $\dot{e}_a$  separando os termos lineares (e bilineares<sup>4</sup>) da parte constante, da seguinte forma:

$$\dot{e}_a = F_i(e_x, e_w) e_a + H_i(\bar{x}_a, \tau), \quad (5.35)$$

onde

$$F_i(e_x, e_w) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 e_x + \tilde{A}_2 e_w + \bar{A} + \tilde{A}_1 \bar{x} & B V_i & \tilde{A}_2 \bar{x} \\ \tilde{W}_1 V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s & \tilde{W}_1 e_x + \tilde{W}_2 e_w + \bar{W} & \tilde{W}_2 V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s \\ -g_I C_5 & 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, 6\} \quad (5.36)$$

$$H_i(\bar{x}_a, \tau) = \begin{bmatrix} \bar{A} \bar{x} + B \bar{V}_{dqs}^s + T_c \\ \bar{W} V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, 6\}. \quad (5.37)$$

Como  $F_i$  e  $H_i$  dependem de  $V_i^{-1}$ , torna-se útil calcular esta matriz para

<sup>3</sup>As matrizes apresentadas nas Equações (5.33-5.34) podem ser encontradas no Apêndice B.

<sup>4</sup>O termo  $F_i(e_x, e_w) e_a$  possui elementos bilineares, porém a matriz  $F_i(e_x, e_w)$  isolada é afim em  $e_x$  e  $e_w$ .



cada modo e avaliar se é inversível. A partir da definição em (5.11),  $V_i$  é dado por

$$V_i^{-1} = \frac{1}{V_{\alpha i}^2 + V_{\beta i}^2} \begin{bmatrix} V_{\beta i} & -V_{\alpha i} \\ V_{\alpha i} & V_{\beta i} \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

e o valor de cada termo presente na Equação (5.38) é mostrado na Tabela 3.

Modo $i$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$V_{\alpha i}$	$V_{\beta i}$	$V_{\alpha i}^2 + V_{\beta i}^2$
1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
2	1	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
3	0	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
4	0	1	1	0	$-\frac{2}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
5	0	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
6	1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$
7	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0

Tabela 3: Valores dos termos de  $V_i^{-1}$  para os modos  $i \in \{1, \dots, 8\}$

A partir deste ponto o modo 8 será desconsiderado, por ser equivalente ao 7, como visto na Tabela 3, com isso temos que o conjunto dos modos a ser considerado nesta formulação é um subconjunto do total de modos possíveis e é dado por  $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$  com  $m = 7$ .

Na Tabela 3, pode-se notar que  $V_{\alpha i}^2 + V_{\beta i}^2 = \left(\frac{2}{3}V_{cc}\right)^2$ ,  $\forall i \neq \{7, 8\}$ . Para os modos 7 e 8 este termo é nulo, o que torna  $V_i^{-1}$  não inversível, portanto as matrizes  $F_i(e_x, e_w)$  e  $H_i(\bar{x}_a, \tau)$  indicadas em (5.36) e (5.37) não podem existir nestes modos, pois o termo  $V_i^{-1}$  aparece na dinâmica de  $e_z$ . O que ocorre é que nos modos em roda-livre a tensão aplicada à máquina é zero (valor constante), e como a dinâmica de  $z$  caracteriza o comportamento senoidal da tensão de entrada, a dinâmica de  $e_z$  não causa influencia alguma na entrada, qualquer que seja, ou seja, a  $\bar{z}$  neste modo é arbitrário (livre).

Partindo da premissa anterior, pode-se escolher  $\bar{z} = z$ , e portanto  $e_z = 0$ . Consequentemente,  $\dot{e}_z = 0$ , então a segunda linha das matrizes  $F_i(e_x, e_w)$  e  $H_i(\bar{x}_a, \tau)$  para o modo 7 são anuladas, eliminando o problema da não

existência de  $V_7^{-1}$ , o que resulta nas seguintes matrizes para este modo:

$$F_7(e_x, e_w) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 e_x + \tilde{A}_2 e_w + \tilde{A} + \tilde{A}_1 \bar{x} & 0_{5 \times 2} & \tilde{A}_2 \bar{x} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \\ -g_I C_5 & 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$H_7(\bar{x}_a, \tau) = \begin{bmatrix} \bar{A} \bar{x} + B \bar{V}_{dqs}^s + T_c \\ 0_{2 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

## 5.6 Projeto da lei de chaveamento

Para o projeto da lei de chaveamento será considerada inicialmente a medição completa do estados e uma função de Lyapunov dependente do erro e diferente para cada modo, com a estrutura a seguir, como proposto em (TROFINO et al., 2009) e discutido na Seção 3.2:

$$v_i(e_a(t)) = e_a' P_i e_a + 2S_i' e_a. \quad (5.41)$$

O termo  $2S_i' e_a$  acrescenta graus de liberdade à função de Lyapunov, o que pode facilitar a busca de solução, e a Equação (5.41) pode ser reescrita de forma matricial como:

$$v_i = \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_i & S_i \\ S_i' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

A derivada temporal da função de Lyapunov é

$$\dot{v}_i(e_a(t)) = 2e_a' P_i \dot{e}_a + 2S_i' \dot{e}_a, \quad (5.43)$$

e, utilizando a Equação (5.35) e considerando que  $P_i$  e  $S_i$  são matrizes constantes em cada modo, esta pode ser reescrita como

$$\dot{v}_i = \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} F_i' P_i + P_i F_i & P_i H_i + S_i' F_i \\ (P_i H_i + S_i' F_i)' & 2S_i' H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Para completar as definições necessárias, lembre-se que existe um acoplamento entre as variáveis  $z_1$  e  $z_2$ , o que restringe seus valores possíveis simultaneamente e é dado por (5.16). Note que podemos reescrever esta restrição em função da variável  $e_z$  usando (5.25), e em seguida em função do

vetor  $[e_a, 1]_{col}$ , quadraticamente, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix}' C_{vi} \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.45)$$

onde

$$C_{vi} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 1} & 0_{5 \times 1} \\ 0_{2 \times 5} & I_2 & 0_{2 \times 1} & V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s \\ 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 5} & (V_i^{-1} \bar{V}_{dqs}^s)' & 0 & \bar{V}_{dqs}^s ' \bar{V}_{dqs}^s - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

A partir das definições apresentadas, as LMIs da condição de decaimento exponencial da Equação (3.22), como no Teorema 3.1, para o caso do motor ficam dadas por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_i' P_i + P_i F_i & P_i H_i + F_i' S_i \\ (P_i H_i + F_i' S_i)' & 2S_i' H_i \end{bmatrix} + \alpha_i \begin{bmatrix} P_i & S_i \\ S_i' & 0 \end{bmatrix} \\ & + L_{ai} N_a + N_a' L_{ai}' + \beta_i C_{vi} < 0 \\ & \forall x_a \in \mathcal{X}_a \quad i = 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_7' P_7 + P_7 F_7 & P_7 H_7 + F_7' S_7 \\ (P_7 H_7 + F_7' S_7)' & 2S_7' H_7 \end{bmatrix} + \alpha_7 \begin{bmatrix} P_7 & S_7 \\ S_7' & 0 \end{bmatrix} \\ & + L_{a7} N_a + N_a' L_{a7}' + L_z C_z + C_z' L_z' < 0 \\ & \forall x_a \in \mathcal{X}_a, \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde  $\mathcal{X}_a$  é o politopo considerado e  $N_a$  define<sup>5</sup> os anuladores para as não linearidades  $e_x$  e  $e_w$  presentes em  $F_i(e_x, e_w)$ , isto é

$$N_a(e_x, e_w) \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.49)$$

e sua inserção na condição (3.22), utilizando o Lema de Finsler mostrado na Seção 2.2.2.4, proporciona graus de liberdade a mais na busca de solução para a LMI (5.47). A inserção da restrição (5.45) sobre  $z$  também foi feita usando o Lema de Finsler com  $\beta$  podendo ser diferente para cada modo, por isso a

<sup>5</sup>A estrutura de  $N_a$  é dada no Apêndice B.

denominação  $\beta_i$ , e para cada vértice.

Por fim, na LMI exclusiva do modo 7 em (5.47), não há a necessidade de se inserir a restrição (5.45), pois  $z$  está sendo desconsiderado, mas é possível a adição de graus de liberdade, também pelo Lema de Finsler, considerando a restrição

$$C_z \begin{bmatrix} e_a \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.50)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 5} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

**Observação 5.6.1** *Pode-se observar que, como as LMIs em (5.47) de cada modo são independentes entre si, podemos fazer com que as variáveis de escalonamento de Finsler,  $L_{ai}$  e  $L_{bi}$ , sejam diferentes em cada modo. Obviamente isso é menos conservador do que se essas variáveis fossem fixas (iguais em todos os modos).*  $\square$

## 5.7 Condições de modos deslizantes para o motor

Como visto na Seção 3.2.1, para equilíbrio chaveado deve existir uma combinação convexa de  $H_i$  tal que  $\sum_{i=1}^m H_i \bar{\theta}_i = 0$ . Isto implica em

$$\bar{A}\bar{x} + B\bar{V}_{dqs}^s + T_c = 0 \quad (\text{não depende dos modos}), \quad (5.51)$$

$$\sum_{i=1}^6 \tilde{H}_i \bar{\theta}_i + \tilde{H}_7 \bar{\theta}_7 = 0 \quad (\text{depende dos modos}), \quad (5.52)$$

onde  $\tilde{H}_i = \bar{W}V_i^{-1}\bar{V}_{dqs}^s$ ,  $i = \{1, \dots, 6\}$ , de (5.36) e (5.37), e  $\tilde{H}_7 = 0$  da definição (5.39). Então, é esperado que (5.51) se anule com os estados atingindo seu devido equilíbrio. Entretanto, desenvolvendo (5.52) temos que

$$\bar{W} \left( \sum_{i=1}^6 V_i^{-1} \bar{\theta}_i \right) \bar{V}_{dqs}^s = 0. \quad (5.53)$$

Na Equação (5.53), pode-se notar que para que o equilíbrio seja atingido e independa das próprias condições de equilíbrio do sistema,  $(\bar{W} \text{ e } \bar{V}_{dqs}^s)$ , devemos ter

$$\sum_{i=1}^6 V_i^{-1} \bar{\theta}_i = 0, \quad (5.54)$$

que depende da combinação dos valores de  $V_i^{-1}$  entre dois ou mais modos. Podemos observar pela Tabela 3 que a condição

$$\sum_{i \in \Phi_k} \begin{bmatrix} V_{\beta i} & -V_{\alpha i} \\ V_{\alpha i} & V_{\beta i} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.55)$$

é atendida para as seguintes combinações dos modos de operação:  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$  e  $\{3, 6\}$ . Neste caso, será considerado que o problema apresente três superfícies ( $n_k = 3$ ) nas quais o modo deslizante ocorrerá entre três modos ( $m_s = 3$ ):

$$\Phi_1 = \{1, 4, 7\} \quad (5.56)$$

$$\Phi_2 = \{2, 5, 7\} \quad (5.57)$$

$$\Phi_3 = \{3, 6, 7\} \quad (5.58)$$

onde  $\Phi_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , define cada uma das três superfícies em que ocorre modo deslizante. Pode-se ter a condição (5.54) satisfeita em equilíbrio para cada um desses subconjuntos de modos em modo deslizante bastando fazer com que o valor de  $\bar{\theta}_i$  seja o mesmo para os três modos. Como deve-se ter satisfeita a condição  $\sum_{i \in \Phi_k} \theta_i = 1$ , tem-se

$$\bar{\theta}_i = \frac{1}{3}, \quad \forall i \in \Phi_k, \quad k = 1, \dots, 3. \quad (5.59)$$

Portanto,

$$\sum_{i \in \Phi_k} \theta_i V_i^{-1} = \left( \frac{2}{3} V_{cc} \right)^{-2} \sum_{i \in \Phi_k} \begin{bmatrix} V_{\beta i} & -V_{\alpha i} \\ V_{\alpha i} & V_{\beta i} \end{bmatrix} \theta_i = 0_2. \quad (5.60)$$

Como feito na Seção 3.2.1, analise a seguinte relação:

$$v_\sigma(e_a) := \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i\} \geq \max_{i \in \Phi_k} \{v_i\} \geq v_s(e_a), \quad (5.61)$$

sendo:

$$v_s(e_a) := \sum_{i \in \Phi_k} \tilde{\theta}_i v_i = e'_a Q_{sk} e_a, \quad (5.62)$$

onde, portanto,

$$\begin{aligned} Q_{sk} &= \sum_{i \in \Phi_k} P_i \tilde{\theta}_i, \\ 0 &= \sum_{i \in \Phi_k} S_i \tilde{\theta}_i. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Considerando este caso particular com  $\tilde{\theta}_i = \bar{\theta}_i = 1/3$ , e com o exposto em (5.60), as condições para a positividade da função de Lyapunov ( $v_\sigma > 0$ ) são feitas como em (3.14), e então ficam

$$\begin{aligned} v_\sigma &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i\} \geq \max_{i \in \Phi_1} \{v_i\} \geq \tilde{\theta}_1 v_1 + \tilde{\theta}_4 v_4 + \tilde{\theta}_7 v_7 \\ &= e'_a \left( \frac{P_1 + P_4 + P_7}{3} \right) e_a, \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} v_\sigma &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i\} \geq \max_{i \in \Phi_2} \{v_i\} \geq \tilde{\theta}_2 v_2 + \tilde{\theta}_5 v_5 + \tilde{\theta}_7 v_7 \\ &= e'_a \left( \frac{P_2 + P_5 + P_7}{3} \right) e_a, \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} v_\sigma &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i\} \geq \max_{i \in \Phi_3} \{v_i\} \geq \tilde{\theta}_3 v_3 + \tilde{\theta}_6 v_6 + \tilde{\theta}_7 v_7 \\ &= e'_a \left( \frac{P_3 + P_6 + P_7}{3} \right) e_a, \end{aligned} \quad (5.66)$$

e as Equações (5.64-5.66) resultam nas seguintes LMIs, respectivamente:

$$\Phi_1 : \begin{cases} P_1 + P_4 + P_7 > 0 \\ S_1 + S_4 + S_7 = 0 \end{cases}, \quad (5.67)$$

$$\Phi_2 : \begin{cases} P_2 + P_5 + P_7 > 0 \\ S_2 + S_5 + S_7 = 0 \end{cases}, \quad (5.68)$$

$$\Phi_3 : \begin{cases} P_3 + P_6 + P_7 > 0 \\ S_3 + S_6 + S_7 = 0 \end{cases}. \quad (5.69)$$

De acordo com o Teorema 3.1, apresentado na Seção 3.2.1, em modos deslizantes deve ser satisfeita a condição dada pelo seguinte problema de

otimização:

$$\begin{aligned} \min \gamma : \\ \Psi_k(\Theta) + \mathfrak{N}_s < 0, \quad i \in \Phi_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \Theta \in \Delta, \end{aligned} \quad (5.70)$$

onde  $\Psi_k$  representa a condição (3.23) reescrita de forma generalizada para múltiplas superfícies de deslizamento, de acordo com a Observação 3.2.3, como:

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} Q_{sk}A_{sk}\Theta_k + A_{sk}\Theta'_k Q_{sk} + \beta_k P_s (\Theta_k - \bar{\Theta}) & Q_{sk}H_{sk} + \beta_s S_{sk} + L_1 C_l & C'_s \\ (Q_{sk}H_{sk} + \beta_s S_{sk} + L_1 C_l)' & -\gamma H'_{sk} H_{sk} + L_2 C_l + C'_l L'_2 & 0_{1 \times n_s} \\ C_s & 0_{n_s \times 1} & -\gamma I_{n_s} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

e

$$\mathfrak{N}_s = \begin{bmatrix} M_i N_b + N'_b M'_i & N'_b N'_i & 0 \\ N_i N_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

onde  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $i \in \Phi_k$  são matrizes de escalonamento a serem determinadas,

$$\begin{aligned} A_{sk} &= [F_i]_{lin}^{m_s}, \quad i \in \Phi_k, \\ H_{sk} &= [H_i]_{lin}^{m_s}, \quad i \in \Phi_k, \\ P_{sk} &= [P_i]_{lin}^{m_s}, \quad i \in \Phi_k, \\ S_{sk} &= [S_i]_{lin}^{m_s}, \quad i \in \Phi_k, \\ \Theta_k &= [\theta_i]_{lin}^{m_s}, \quad i \in \Phi_k, \end{aligned}$$

e  $N_b$  é o anulador definido por<sup>6</sup>

$$N_b (e_x, e_w) e_a = 0. \quad (5.73)$$

Note que o politopo de  $\Theta$  é definido pelo *simplex*  $\Delta$ . Para este caso do motor onde são considerados  $m_s = 3$  modos em cada superfície de deslizamento e portanto  $\Theta \in \mathbb{R}^3$ , o *simplex* tem apenas 3 vértices (e não  $2^3$  como em um politopo usual), como representado pelo triângulo na Figura 24 e pode ser descrito como o envoltório convexo de seus vértices da seguinte forma:

$$\Delta = \mathbf{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

<sup>6</sup>A estrutura de  $N_b$  é dada no Apêndice B.

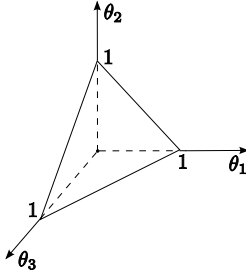


Figura 24: Representação gráfica do simplex  $\Delta$  para o caso onde  $m_s = 3$ .

## 5.8 Resolução das LMIs

Atualmente existem diversos pacotes computacionais disponíveis para a solução de problemas LMI, entretanto a maior parte é de caráter comercial. Na solução dos problemas LMI deste trabalho foram utilizados dois pacotes computacionais: SeDuMi (STURM, 2001) e/ou SDPT3 (TOH; TODD; TÛTÛNCÛ, 1996), ambos *freeware*. Foi utilizado também o *parser* YALMIP (LÖFBERG, 2008), que é um toolbox distribuído gratuitamente para MatLab<sup>®</sup> e permite ao usuário a solução e modelagem dos problemas de modo intuitivo, possibilitando um rápido desenvolvimento e uso em conjunto com a maioria dos solucionadores existentes.

Com relação à resolução<sup>7</sup> das LMIs, podemos observar alguns pontos importantes. Resolver essas LMIs para  $\forall x_a \in \mathcal{X}_a$  significa resolver simultaneamente essa LMI nos vértices de  $\mathcal{X}_a$ , conforme foi explicado na Seção 2.2.3. Como o sistema aumentado possui 8 variáveis de estado, mas a formulação foi feita de tal forma a evitar que os fluxos do rotor ( $x_3$  e  $x_4$ ) e as variáveis da transformação de Park ( $z_1$  e  $z_2$ ) precisassem ser considerados no politopo, restam 4 estados em  $\mathcal{X}_a$ , portanto este possui  $2^4$  vértices. O politopo  $\mathcal{X}_a$  foi escolhido através de uma simulação do motor do indução sendo acionado por inversor de tensão com a modulação PWM apresentada na Seção 4.6.1. Dessa simulação foram extraídos os valores mínimos e máximos das variáveis de estado do motor, com os quais se formam os vertices de  $\mathcal{X}_a$ .

A solução das LMIs é uma questão de *factibilidade* e está relacionada principalmente ao número de restrições impostas ao problema e aos graus de liberdade acrescentados (utilizando os anuladores, por exemplo). Portanto,

<sup>7</sup>Os dados nominais da máquina e o politopo considerado podem ser encontrados no Apêndice A.



um aspecto relevante na busca de solução das LMIs diz respeito à dimensão da LMI final, que é obtida ao se resolver todas as LMIs simultaneamente para todo  $i = 1, \dots, 6$  em todos os vértices de  $\mathcal{X}_a$  e para todo  $\theta_i \in [0, 1] : \sum_{i \in \Phi_k}^{m_s} \theta_i$ . Para quantificar esse fato, podemos obter o número de LMIs que devem ser resolvidas: 1 LMI para cada um dos 7 modos e dos 16 vértices de  $\mathcal{X}_a$  em (5.47), mais as 6 LMIs presentes em (5.67-5.69), e ainda a LMI (5.70) nos 3 conjuntos de modos  $\Phi_k$ ,  $k = 1 \dots 3$ , em modos deslizantes, nos 16 vértices de  $\mathcal{X}_a$  e nos 3 vértices de  $\Theta$  do simplex  $\Delta$ . Isso resulta em um total de 262 LMIs a serem resolvidas. Caso deseje-se testar as condições localmente na origem, antes de expandir o politopo, tem-se 22 LMIs.

De fato, a dificuldade em se encontrar solução numérica para as LMIs não está diretamente relacionada ao número de LMIs, mas sim ao nível de restritividade e conservadorismo impostos por elas. Para exemplificar, suponha as LMIs

$$P - a < 0 \quad (5.74)$$

$$P - b < 0 \quad (5.75)$$

$$P - c > 0 \quad (5.76)$$

onde  $P$  é uma variável de busca e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes positivas. Suponha que  $a < b$  e note que, neste caso, a LMI (5.75) não faz diferença no problema, pois estará satisfeita sempre que (5.74) estiver satisfeita. Agora veja a partir das LMIs (5.74) e (5.76) que a solução  $P$  está compreendida no intervalo  $c < P < a$ , então quanto mais próximos um do outro estiverem os valores de  $a$  e  $c$ , menor o intervalo possível de soluções, *i.e.* o problema é muito restritivo. Para concluir, é fácil perceber que se  $c > a$ , já não existe solução com apenas estas duas LMIs. Entretanto, as LMIs do motor são de difícil análise e portanto não podemos tirar conclusões quanto à restritividade, e com o grande número de LMIs a probabilidade de o problema ser mais restritivo é maior.

## 5.9 Estrutura do Sistema de Controle

Na Figura 25 é mostrada a representação em diagrama de blocos da estrutura de controle via chaveamento aplicada ao motor de indução, como descrito no decorrer deste capítulo. Nesta figura, a região tracejada delimita o sistema físico a ser controlado e o exterior desta região é composto pela lógica de comutação empregada e outras definições necessárias.

Partindo do bloco do sistema, tem-se as saídas que são as correntes do

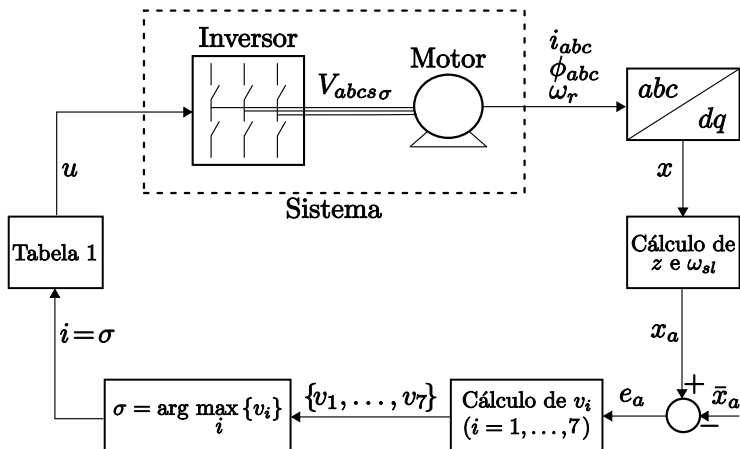


Figura 25: Estrutura do controle chaveado aplicado ao motor de indução com inversor trifásico.

estator, fluxos do rotor e velocidade do rotor, e como as duas primeiras são trifásicas, precisam ser transformadas para o referencial síncrono, e com isso obtém-se os estados,  $x$ . As variáveis de saída da máquina podem ser medidas ou estimadas, o que é usual para os fluxos em máquinas com rotor em gaiola. Estimadores de fluxo podem ser encontrados em (SALMASI; NAJAFABADI; MARALANI, 2010), (HAFFNER, 1998).

A partir dos estados  $x$ , são gerados os valores instantâneos das demais variáveis de estado:  $z$  e  $\hat{\omega}_{sl}$ . Isto é feito utilizando-se as dinâmicas dadas pelas Equações (5.14) e (5.18), respectivamente. Então, obtém-se o vetor de estados aumentados  $x_a$ , que por sua vez é comparado às referências desejadas  $\bar{x}_a$ , produzindo os valores instantâneos do vetor de erros  $e_a$ .

Um requisito para o funcionamento desta estrutura de controle é encontrar solução para as LMIs de projeto do chaveamento. A solução das LMIs é feita em modo *offline*, ou seja, à parte da estrutura de controle, e os coeficientes  $P_i$  e  $S_i$  da função de Lyapunov (5.41) são armazenados e então utilizados para o cálculo de  $v_i$  para todos os modos  $i = 1, \dots, 7$  no sistema de controle apresentado. Os valores de  $v_i$  são comparados, e o índice do modo da função de maior valor determina o modo atual,  $\sigma$ . Caso  $\sigma$  seja o mesmo da iteração anterior, não ocorre chaveamento. Conhecido  $\sigma$ , é utilizada a Tabela 2 para determinar o vetor de comando das posições das chaves do inversor  $u$ , que é

definido como

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

e é aplicado ao inversor, chaveando-o, se necessário. A partir do chaveamento, é gerada uma tensão trifásica  $V_{abc\sigma}$  para o modo atual e esta é aplicada ao motor de indução, reiniciando o ciclo.

## 5.10 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo foi apresentada uma proposta de formulação para o problema de controle da máquina de indução com seguimento de referência utilizando LMIs, iniciando-se pelos conceitos necessários para a formulação do mesmo. No caso, a máquina considerada opera como motor e tem rotor em gaiola. Formulações semelhantes poderiam ser desenvolvidas para o caso do gerador e de máquina com rotor bobinado.

Para os casos não formulados, citados acima, as mudanças fundamentais seriam: a diferença entre o modelo com rotor bobinado e o rotor em gaiola, as diferenças entre as topologias de posicionamento do(s) inversor(es) no sistema, a dinâmica escolhida para geração de  $\omega_s$  e o objetivo de controle (regulação de velocidade ou maximização da potência gerada, como exemplos).

Com relação aos resultados da resolução das LMIs, foi encontrada solução quando consideradas as LMIs (5.67-5.69), de positividade de  $v_\sigma(x)$ , e (5.47), de negatividade de  $\dot{v}_\sigma$ . Entretanto, foi constatado que apenas isso não é o suficiente para a operação desejada do sistema, o que pode indicar que realmente existe a necessidade de considerar a estabilização das dinâmicas em modo deslizante. Entretanto, quando acrescentada a LMI de modo deslizante estável, proposta em (5.70), ao conjunto de LMIs a ser testado, o problema deixa de ser factível, mesmo quando as condições são testadas localmente na origem.

Ainda quanto ao modo deslizante, a forma com que este deve ser considerado nas LMIs permanece uma questão em aberto. Além da hipótese apresentada na Seção 5.7, pode existir a necessidade de se considerar todos os seis modos em modo deslizante simultaneamente ou entre cada modo  $i \in \{1, \dots, 6\}$  e o modo 7, por exemplo. Não é trivial concluir qual caso seria mais geral ou até mesmo menos restritivo.

Uma outra formulação buscando o controle chaveado de motores de indução por LMIs, pode ser encontrada em (COUTINHO, 2006), onde o sistema

considerado estava em coordenadas  $\alpha\beta 0$ , a função de Lyapunov era única, *i.e.* a mesma para todos os modos, e eram tratadas apenas as condições de positividade desta e negatividade de sua derivada. Não haviam ainda condições de estabilidade em modos deslizantes, os pacotes computacionais existentes eram menos eficientes, e não foi encontrada solução em politopo para aquela formulação proposta. Vale mencionar que na presente dissertação, a formulação tem várias das características indicadas como trabalhos futuros em (COUTINHO, 2006).

Como o problema formulado para o motor de indução neste capítulo não apresentou solução, uma possibilidade é a redução do conservadorismo utilizando as ideias apresentadas no Capítulo 2. Como principais vantagens, a representação do sistema não linear da máquina pela forma (2.39), para explorar o potencial de se utilizar funções de Lyapunov mais complexas do que a definida em (3.10), e a possibilidade de redução do número de LMIs com o Corolário 2.4.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho foram apresentadas condições para estabilidade de sistemas não lineares racionais e incertos e uma proposta de formulação de uma técnica de chaveamento aplicada às máquinas de indução.

No Capítulo 2 foram apresentadas condições para estabilidade assintótica de sistemas não lineares racionais e incertos e contém as principais contribuições deste trabalho. A técnica é baseada em uma representação alternativa diferencial-algébrica para o sistema que permite reescrever vários tipos de problemas não lineares em uma forma afim que pode ser tratada por LMIs. Com isso, pode ser considerada uma função de Lyapunov racional e dependente de parâmetros incertos. Foram apresentadas as condições de estabilidade local (na origem) e em seguida esta foi estendida para considerar uma região do espaço de estados e também para estabilidade global. Com relação à estabilidade regional politópica foram considerados dois casos: um conjunto convexo e um conjunto não convexo (união de politopos) de estados iniciais. Foi proposta também uma maneira de se evitar a abordagem politópica. Finalmente, a efetividade da técnica foi ilustrada através de exemplos numéricos diversos, demonstrando o potencial para futura aplicação em controle chaveado de sistemas não lineares, como a máquina de indução.

No Capítulo 3 foi descrita uma técnica de chaveamento cujo objetivo é a estabilidade e o seguimento de referência de sistemas comutados. Esta técnica é baseada em funções de Lyapunov quadráticas diferentes para cada modo de operação e as garantias de estabilidade se dão pela positividade e decrescimento da função de Lyapunov comutada (a função do modo ativo no instante considerado), inclusive na ocorrência de modos deslizantes. As condições de modos deslizantes estáveis foram definidas de forma geral o suficiente para considerar a ocorrência de superfícies de deslizamento entre vários modos simultaneamente. Ao final, foi demonstrada a utilização da técnica pela resolução de um exemplo simples: o controle chaveado do conversor *Buck*.

O Capítulo 4 tratou de discutir o primeiro passo para a criação de uma técnica de controle para máquinas de indução: a determinação dos modelos que representam este sistema. Devido ao fato de a máquina ser trifásica, foram apresentadas as transformações que possibilitam a representação desta em uma forma bifásica equivalente, cujo sistema de coordenadas gira com uma frequência arbitrária em relação ao modelo trifásico. Outro ponto importante apresentado é que, além do modelo da máquina, é necessária a modelagem de toda a topologia do sistema de acionamento da máquina. Esta

topologia é basicamente a configuração das ligações inversor-máquina e a carga (ou a turbina e a rede de distribuição, se for o caso).

O Capítulo 5 foi dedicado à formulação LMI de uma técnica de chaveamento com aplicação à um caso específico de máquina: motor de indução com rotor em gaiola com sistema de coordenadas síncrono. As formulações para os demais casos tendem a ser mais complicadas por causa de suas topologias como visto na Seção 4.8, portanto é interessante buscar a solução do caso mais simples antes de confrontar os demais. A técnica apresentada é baseada em funções de Lyapunov, diferentes para cada modo de operação, e busca levar em conta a ocorrência de modos deslizantes entre modos específicos. Com essa consideração não foi possível encontrar solução factível para o problema. Desta forma, até o momento não é possível estabelecer uma conclusão sobre a aplicabilidade do método em motores de indução.

Uma das ideias principais deste trabalho era a aplicação da técnica de chaveamento do Capítulo 3 nas máquinas de indução. A ideia é determinar uma função de Lyapunov, com uma dada estrutura para cada modo de operação do sistema, em que se baseia uma lei de chaveamento com o objetivo de levar o sistema para um ponto de referência dado mesmo com a ocorrência de modos deslizantes. É notável a dificuldade de formulação LMI de uma técnica de chaveamento para a máquina de indução, devido ao seu grande número de não linearidades e de parâmetros incertos e, além disso, a necessidade de se encontrar uma solução que satisfaça a maior região possível do espaço de estados, ou no mínimo a faixa de operação da máquina.

Pelos motivos comentados acima foram apresentados os estudos que resultaram na teoria mostrada no Capítulo 2, que lida com todos estes problemas, preparando o caminho para aplicação futura desta no caso da máquina. Além do mais, esta teoria de estabilidade de sistemas não lineares permite considerar uma função de Lyapunov muito mais complexa do que a utilizada na formulação do Capítulo 3, aumentando portanto as chances de se encontrar uma solução factível. O problema do grande número de LMIs no projeto do motor também pode ser reduzido se evitar a abordagem politópica, como proposto no Capítulo 2.

O conteúdo do Capítulo 2 desta dissertação também resultou no documento (TROFINO; DEZUO, ), atualmente em fase de submissão ao *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Durante o curso de mestrado também realizei estudos, baseados em LMIs, dedicados à evitar chaveamento de frequência infinita, à evitar modos deslizantes e projetar técnicas de controle por comutação entre dinâmicas de controle diferentes aplicado à sistemas que podem ser comutados ou não. Pretendo continuar estes e outros

trabalhos durante o curso de doutorado.

Como perspectivas de trabalhos futuros, podem ser indicadas:

- criar estratégias de controle utilizando as condições de estabilidade de sistemas não lineares apresentadas no Capítulo 2;
- expandir as técnicas de controle do item anterior para sistemas comutados e aplicar à máquina de indução;
- tratar parâmetros da máquina como incertos, os estados  $x_3$  e  $x_4$  (fluxos do rotor) como não mensuráveis utilizando observadores e os equilíbrios incertos e desconhecidos utilizando filtros *washout*;
- investigar e resolver o problema dos modos deslizantes na máquina;
- criar formulações para as outras topologias do sistema inversor-máquina.
- incluir condições para restringir a frequência de chaveamento máxima.





## REFERÊNCIAS

- ANAYA-LARA, O. et al. *Wind Energy Generation: Modelling and Control*. Chichester, Reino Unido: John Wiley & Sons, 2009.
- ASSEU, O. et al. Robust feedback linearization and observation approach for control of an induction motor. *Asian Journal of Applied Sciences*, v. 1, n. 1, p. 59–69, 2008.
- ASSMANN, D. *Uma Nova Técnica de Projeto de Lógica de Chaveamento para o Controle de Sistemas Chaveados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2008.
- BARBI, I. *Teoria Fundamental do Motor de Indução*. Florianópolis, Brasil: Editora da UFSC, 1985.
- BARBI, I.; MARTINS, D. C. *Introdução ao Estudo dos Conversores CC-CA*. Florianópolis, Brasil: Editora da UFSC, 2005.
- BARBI, I.; MARTINS, D. C. *Conversores CC-CC Básicos Não Isolados*. Florianópolis, Brasil: Edição dos Autores, 2008.
- BAZANELLA, A. S.; REGINATTO, R. Robust tuning of the speed loop in indirect field oriented control of induction motors. *Automatica*, v. 37, n. 11, p. 1811–1818, Setembro 2001.
- BLASCHKE, F. The principle of field-orientation as applied to the new transvektor closed-loop control system for rotating-field machine. *Siemens Review*, v. 39, n. 5, 1972.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, EUA: [s.n.], 2004. p. 3890–3895.
- BORGES, F.; PAGANO, D. J. Sliding mode control of a boost converter with a washout filter. In: *XV Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 1638–1643.
- BOSE, B. K. *Modern Power Eletronics and AC Drives*. Upper Saddle River, USA: Prentice-Hall, 2002.

- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, USA: SIAM, 1994.
- CHESI, G. Estimating the domain of attraction for uncertain polynomial systems. *Automatica*, v. 40, p. 1981–1986, 2004.
- CHESI, G. et al. Robust analysis of LFR systems through homogeneous polynomial Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 49, n. 7, p. 1211–1215, 2004.
- CHIASSON, J. Dynamic feedback linearization of the induction motor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 38, n. 10, p. 1588–1594, 1993.
- COTRIM, A. M. B. *Instalações Elétricas Industriais*. São Paulo, Brasil: McGraw-Hill Ltda, 1992.
- COUTINHO, D. F. et al. Linear  $H_\infty$  filter design for a class of uncertain nonlinear systems. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, p. 380–385, 2003.
- COUTINHO, D. F.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Stability analysis of implicit polynomial systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 54, p. 1012–1018, 2008.
- COUTINHO, D. F.; FU, M. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 9, p. 1575–1580, 2002.
- COUTINHO, D. F. et al. Stability analysis of implicit polynomial systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 18, n. 1, p. 88–110, 2008.
- COUTINHO, M. S. *Projeto via LMI de Sistemas de Controle Comutado para um Motor de Indução*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2006.
- DAVISON, E. J.; KURAK, E. M. A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems. *Automatica*, v. 7, p. 627–636, 1971.
- DE LUCA, A.; ULIVI, G. Design of an exact nonlinear controller for induction motors. *IEEE transactions on automatic control*, v. 34, n. 12, p. 1304–1307, 1989.

- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: *Perspectives in Robust Control*. Berlim: Springer, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences). p. 241–257.
- DENAI, M. A.; ATTIA, S. A. Fuzzy and neural control of an induction motor. *Int. J. Appl. Math. Computer. Sci.*, v. 12, 2002.
- DENDOUGA, A. et al. Power flow control of a doubly fed induction generator (DFIG). *Int. J. Elec. Power Eng*, v. 1, n. 2, p. 132–137, 2007.
- EL GHAOUI, L.; NICULESCU, S. I. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Filadélfia: SIAM, 2000.
- EL GHAOUI, L.; SCORLETTI, G. Control of rational systems using linear fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, v. 32, n. 9, p. 1273–1284, 1996.
- FERREIRA, S. B. *Estudo e Avaliação do Desempenho de Estratégias de Controle Direto do Torque em Máquinas de Indução*. Dissertação (Mestrado) — PUCRS, Porto Alegre, Brasil, 2004.
- FERREIRA, S. B.; HAFFNER, J. F.; PEREIRA, L. F. A. Use of an alternative technique for estimating stator flux in the direct torque control of induction motors. In: *IV Industry Applications Conference - INDUS-CON 2000*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 87–92.
- FITZGERALD C. KINGSLEY, S. D. U. A. E. *Máquinas Elétricas*. [S.l.]: Bookman, 2006.
- FURTUNATO, A. F. A.; SALAZAR, A. O.; DE ARAUJO, A. D. A robust control for induction motor using a variable structure model reference adaptive control (VS-MRAC). In: *Power Eletronics Congress*. Morelia, México: [s.n.], 1998. p. 61–69.
- GENESIO, R.; TARTAGLIA, M.; VICINO, A. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 30, n. 8, p. 747–755, 1985.
- HAFFNER, J. F. *Análise de Estimadores de Fluxo para Implementação de Técnicas de Controle por Campo Orientado Direto em Máquinas de Indução*. Dissertação (Mestrado) — PUCRS, Porto Alegre, Brasil, 1998.

- HASSOUNEH, M. A.; LEE, H. C.; ABED, E. Washout filters in feed-back control: benefits and limitations. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Nantes, França: [s.n.], 2004. v. 5, p. 3950–3955.
- HINDI, H. A tutorial on convex optimization. In: *2004 American Control Conference*. Boston, EUA: [s.n.], 2004. p. 3252–3265.
- HOFMANN, W.; OKAFOR, F. Optimal control of doubly-fed full-controlled induction wind generator with high efficiency. *IECON 2001*, v. 2, p. 1213–1218, 2001.
- HOLTZ, J. Pulsewidth modulation-a survey. *IEEE Trans. Ind. Electron*, v. 39, n. 5, p. 410–420, 1992.
- ITO, H. Region maximization technique in robust nonlinear control via state-dependent scaling design. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, EUA: [s.n.], 1999. v. 2, p. 1390–1394.
- JACOBINA, C. B. et al. Sistema de acionamento com motor de indução orientado indiretamente pelo campo com adaptação MRAC da velocidade. *Sba: Controle & Automação*, v. 14, n. 1, p. 41–49, 2003.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- KIM, D.; HA, I.; KO, M. Control of induction motors via feedback linearization with input-output decoupling. *International Journal of Control*, v. 51, n. 4, p. 863–883, 1990.
- KRAUSE, P. C.; WASYNCHUK, O.; SUDHOFF, S. D. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 2. ed. Piscataway, USA: John Wiley & Sons, 2002.
- LEI, Y. et al. Modeling of the wind turbine with a doubly fed induction generator for grid integration studies. *IEEE Transaction on Energy Conversion*, v. 21, n. 1, p. 257–264, 2006.
- LEONHARD, W. Field-orientation for controlling AC machines - principle and application. In: *3rd International Conference on Power Electronics and Variable-Speed Drives*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 277–282.
- LEONHARD, W. *Control of Electrical Drives*. 3. ed. Berlim: Springer-Verlag, 2001.

- LÖFBERG, J. Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seul, Coreia do Sul: [s.n.], 2008. Yalmip home page <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser, 2003.
- MAHI, Z.; SERBAN, C.; SIGUERDIDJANE, H. Direct torque control of a doubly-fed induction generator of a variable speed wind turbine power regulation. In: *Proceedings of EWECE 2007*. [S.l.: s.n.], 2007.
- MARQUES, J. et al. A survey on variable-speed wind turbine system. In: *Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência (COBEP)*. Fortaleza, Brasil: [s.n.], 2003. p. 732–738.
- MORSE, A. S. (Ed.). *Control Using Logic Based Switching*. Londres, Inglaterra: Springer, 1997.
- ORTEGA, R.; ESPINOSA-PÉREZ, G. Passivity-based control with simultaneous energy-shaping and damping injection: the induction motor case study. 2005.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. *Analysis of Non-Polynomial Systems Using the Sum of Squares Decomposition*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004.
- RASHID, M. *Eletrônica de Potência - Cicuitos, Dispositivos e Aplicações*. São Paulo, Brasil: Makron Books, 1999.
- SALMASI, F.; NAJAFABADI, T.; MARALANI, P. An adaptive flux observer with online estimation of DC-link voltage and rotor resistance for VSI-based induction motors. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 25, n. 5, p. 1310–1319, 2010.
- SEILER, P. et al. Parameter-dependent Lyapunov functions for linear systems with constant uncertainties. In: *Proceedings of IEEE Conf. Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 54, n. 10, p. 2410–2416.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- SPILLER, P. A.; HAFFNER, J. F.; PEREIRA, L. F. A. Real-time application of simulation tools and implementation of control techniques for

- induction machines in Matlab/Simulink® enviroment. *IECON*, v. 3, p. 2068–2072, 2002.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab® toolbox for optimization over symmetric cones. Tilburg, Holanda, Outubro 2001.
- TARNOWSKI, G. C. *Metodologia de Regulação da Potência Ativa para Operação de Sistemas de Geração Eólica com Aerogeradores de Velocidade Variável*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2006.
- TARNOWSKI, G. C.; REGINATTO, R. Metodología de operação de geradores eólicos com geradores de indução de dupla alimentação visando o despacho de potência. In: *Proc. 10th Simposyum of Specialists in Electric Operational and Expantion Planning - X SEPOPE*. Florianópolis, Brasil: [s.n.], 2006.
- TARNOWSKI, G. C.; REGINATTO, R. Adding active power regulation to wind farms with variable speed induction generators. In: *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. Tampa, USA: [s.n.], 2007. p. 1–8.
- TOH, K. C.; TODD, M. J.; TÜTÜNCÜ, R. H. SDPT3 - a MATLAB® package for semidefinite programming. *Technical Report, Cornell University*, Ithaca, USA, 1996.
- TOLİYAT, H. A.; LEVI, E.; RAINA, M. A review of RFO induction motor parameter estimation techniques. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 18, n. 2, p. 271–283, Junho 2003.
- TROFINO, A. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago: [s.n.], 2000. p. 3707–3711.
- TROFINO, A. et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 9, p. 2215–2222, Setembro 2009.
- TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. In: *Proceedings of IEEE Conf. Decision and Control*. section FrP04-4: [s.n.], 1999.

- TROFINO, A.; DEZUO, T. J. M. LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems.
- TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Corrections to “Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields“. *Submetido à IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010.
- TRZYNADLOWSKI, A. *The Field Orientation Principle in Control of Induction Motors*. 2. ed. Norwell: Kluwer Academic Publisher, 2000.
- VERGHESE, G. C.; LÉVI, B. C.; KAILATH, T. A generalized state space for singular systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 26, n. 4, p. 811–831, 1981.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 1996.





## APÊNDICE A – DADOS DE SIMULAÇÃO

Os parâmetros e valores nominais do motor, adotados nos estudos de simulação, foram extraídos de (SPILLER; HAFFNER; PEREIRA, 2002) e se encontram listados abaixo, juntamente com valores de referência e dos limites do politopo dos estados:

Potência de entrada	0.375 kW
Resistência do estator ( $R_s$ )	14.5 $\Omega$
Resistência do rotor ( $R_r$ )	15.6 $\Omega$
Indutância própria do estator ( $L_s$ )	0.7199 H
Indutância própria do rotor ( $L_r$ )	0.7199 H
Indutância mútua estator-rotor ( $L_m$ )	0.6738 H
Momento de inércia ( $J_m$ )	$7.6 \times 10^{-4}$ kg.m <sup>2</sup>
Coefficiente de atrito ( $B_m$ )	$10^{-5}$ N.m.s/rad
Número de pares de pólos ( $p$ )	2
Tensão DC do inversor ( $V_{cc}$ )	300 V
Ganho do integral do PI ( $g_I$ )	0.001
Conjugado de carga ( $\tau_c$ )	0
Referências de seguimento	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = 0.55 \text{ A} \\ \bar{x}_2 = 0.03 \text{ A} \\ \bar{x}_3 = 0.37 \text{ Wb} \\ \bar{x}_4 = 0.02 \text{ Wb} \\ \bar{x}_5 = 377 \text{ rad/s} \\ \bar{V}_{ds}^s = 37 \text{ V} \\ \bar{V}_{qs}^s = 144.5 \text{ V} \\ \bar{\omega}_{sl} = 3.77 \text{ rad/s} \end{array} \right.$
Politopo ( $\mathcal{X}_a$ )	$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^{min} = 0, & x_1^{max} = 1 \\ x_2^{min} = 0, & x_2^{max} = 1 \\ x_5^{min} = 0, & x_5^{max} = 400 \\ \hat{\omega}_{sl}^{min} = 3.77, & \hat{\omega}_{sl}^{max} = 18.85 \end{array} \right.$



## APÊNDICE B – MATRIZES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O MOTOR

Abaixo se encontram as matrizes ocultadas na formulação por não haver necessidade de seu conhecimento para entendimento desta. Lembrando que  $C_j x = x_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 5\}$ , as matrizes são:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_5 & 0 & a_3 C_5 & 0 \\ -C_5 & 0 & -a_3 C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 C_2 & -a_8 C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & C_5 \bar{x} + \bar{\omega}_{sl} & a_2 & a_3 C_5 \bar{x} & 0 \\ -C_5 \bar{x} - \bar{\omega}_{sl} & -a_1 & -a_3 C_5 \bar{x} & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & -a_4 & \bar{\omega}_{sl} & 0 \\ 0 & a_5 & -\bar{\omega}_{sl} & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 C_2 \bar{x} & -a_8 C_1 \bar{x} & -a_6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_5 \\ -C_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0 & C_5 \bar{x} + \bar{\omega}_{sl} \\ -C_5 \bar{x} - \bar{\omega}_{sl} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_a(e_x, e_w) = \begin{bmatrix} e_w C_1 & 0_{1 \times 2} & -C_1 e_x & 0 \\ e_w C_2 & 0_{1 \times 2} & -C_2 e_x & 0 \\ e_w C_5 & 0_{1 \times 2} & -C_5 e_x & 0 \\ C_1 & 0_{1 \times 2} & 0 & -C_1 e_x \\ C_2 & 0_{1 \times 2} & 0 & -C_2 e_x \\ C_5 & 0_{1 \times 2} & 0 & -C_5 e_x \\ 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 2} & 1 & -e_w \end{bmatrix}$$

$$N_b(e_x, e_w) = \begin{bmatrix} e_w C_1 & 0_{1 \times 2} & -C_1 e_x \\ e_w C_2 & 0_{1 \times 2} & -C_2 e_x \\ e_w C_5 & 0_{1 \times 2} & -C_5 e_x \end{bmatrix}$$